Interpolazioari buruzko ariketen emaitzak

1.-(a) Lagrangeren metodoa:

$L_1(x) = x^2/3 - 2/3x$, $L_2(x) = -x^2/2 + x/2 + 1$, $L_3(x) = x^2/6 + x/6$, eta $p(x) = x^2/6 + 13/6x + 2$

Newtonen metodoa:

$p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 2x + 2$, eta $p(x) = p_3(x) = x^2/6 + 13/6x + 2$

1.-(b) Lagrangeren metodoa:

$L_1(x) = -x^3/6 + 3/2x^2 - 13/3x + 4$, $L_2(x) = x^3/2 - 4x^2 + 19/2x - 6$, $L_3(x) = -x^3/2 + 7/2x^2 - 7x + 4$, $L_4(x) = x^3/6 - x^2 + 11/6x - 1$, eta $p(x) = x^2/2 - 5/2x + 3$

Newtonen metodoa:

$p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2 - x$, $p_3(x) = x^2/2 - 5/2x + 3$, eta $p(x) = p_4(x) = x^2/2 - 5/2x + 3$

2.- Lagrangeren metodoa:

$L_1(x) = 9/160x^4 - 9/80x^3 - x^2/10 + x/5$, $L_2(x) = -81/640x^4 + 27/160x^3 + 81/160x^2 - 27/40x$, $L_3(x) = 9/64x^4 - 13/16x^2 + 1$, $L_4(x) = -81/640x^4 - 27/160x^3 + 81/160x^2 + 27/40x$, $L_5(x) = 9/640x^4 + 9/80x^3 - x^2/10 - x/5$, eta $p(x) = 9/640x^4 - 49/160x^2 + 1$

Newtonen metodoa:

$p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 3/4x + 3/2$, $p_3(x) = -3/16x^2 + x/8 + 1$, $p_4(x) = -9/320x^3 - 9/32x^2 + x/20 + 1$, eta
$p(x) = p_5(x) = 9/640x^4 - 49/160x^2 + 1$

3.- (a) Polinomio interpolatzailea: $p_1(x) = -x^2/960 + 5/48x + 3/5$ eta $p_1(32) = 43/15 \approx 2.86666\cdots$

(b) Polinomio interpolatzailea: $p_2(x) = -x^4/1044480 + 85/258048x^3 - 119/5120x^2 + 85/192x - 2248/5355$ eta $p_2(32) = -403/1530 \approx -0.263398\cdots$

Benetako balioa: $f(32) = \log_4(32) = 5/2$??

4.- $(-1,-7),(2,5)$ eta $(3,-3)$ puntuetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea $p(x)=-3x^2+7x+3$ da, beraz, puntu horietatik pasatzen diren 4. mailako polinomioak, horrelakoak izango dira,

$$q(x)=p(x)+(ax+b)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=-3x^2+7x+3+(ax+b)(x+1)(x-2)(x-3)$$

$q'(1)=13$ eta $q''(2)=-10 \iff a=4$ eta $b=-3$. Beraz,

$$q(x)=4x^4-19x^3+13x^2+28x-15$$

6.-(a) Printzipioz, bigarren mailako polinonio interpolatzailea kalkulatu nahi izanez gero, hiru puntu aukeratu beharra dago eta aukeraketarik normalena eta errezena, $x_1=\pi/6, x_2=\pi/3$ (tarteko erdipuntua) eta $x_3=\pi/2$ (beraz $h=\pi/6$) hartzea izango da. Horrez gain,

$f(x_1)=f(\pi/6)=\cos(\pi/3)=1/2, f(x_2)=f(\pi/3)=\cos(2\pi/3)=-1/2$ eta $f(x_3)=f(\pi/2)=\cos(\pi)=-1$ direla.

$(\pi/6,1/2),(\pi/3,-1/2)$ eta $(\pi/2,-1)$ puntuak harturik eta Lagrangeren metodoa erabiliz, polinomio interpolatzailea:

$$L_1(x)=\frac{18}{\pi^2}x^2-\frac{15}{\pi}x+3\,,\ L_2(x)=-\frac{36}{\pi^2}x^2+\frac{24}{\pi}x-3$$

$$L_3(x)=\frac{18}{\pi^2}x^2-\frac{9}{\pi}x+1 \quad \text{eta} \quad p(x)=\frac{9}{\pi^2}x^2-\frac{21}{2\pi}x+2$$

6.-(b) $z\in[\pi/6,\pi/2]$ eta $h=\pi/6$ izanda,

$$|E_z|=\frac{|\prod_{i=0}^{2}(t-i)|h^3}{3!}\,|f'''(c)|\,,\ \text{non } c\in(\pi/6,\pi/2)\text{ den.}$$

$$g(t)=\prod_{i=0}^{2}(t-i)=t^3-3t^2+2t;\ |g(t)|\le\frac{2\sqrt{3}}{9};\ 0\le t\le 2$$

$$f'''(x)=8\sin(2x);\ |f'''(x)|\le f'''(\pi/4)=8\sin(\pi/2)=8;\ \pi/6<x<\pi/2$$

$$\text{Beraz,}\quad |E_z|\le\frac{2\sqrt{3}/9\,(\pi/6)^3\,8}{3!}=\frac{\sqrt{3}\pi^3}{729}\simeq 0.073669$$

Bestalde, $|E_{\pi/4}| = |f(\pi/4) - p(\pi/4| = 1/16 = 0.0625$

aurrekoa baino txikiagoa, jakina

6.-(c)

$$|E_z| \leq \frac{2\sqrt{3}/9\, h^3\, 8}{3!} < 5.10^{-3} \Longleftrightarrow h < 0.2135\cdots \text{ edo } h = \pi/n \text{ eginez } \Longleftrightarrow n > 14.\cdots$$

6.- $z \in [0,1]$ izanda,

$$|E_z| = \frac{|\prod_{i=0}^{3}(t-i)|h^4}{4!}\, |f^{iv}(c)|\,, \text{ non } c \in (0,1) \text{ den.}$$

$$g(t) = \prod_{i=0}^{3}(t-i) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t;\ |g(t)| \leq 1;\ 0 \leq t \leq 3$$

$$f^{iv}(x) = e^x(x+4);\ |f^{iv}(x)| < f^{iv}(1) = 5e;\ 0 < x < 1$$

$$|E_z| = \frac{h^4}{4!}5e < 5.10^{-4} \Longleftrightarrow h < 0.1723\cdots$$

Soluzio posible bat: $h = 0.15$ eta $x_1 = 0, x_2 = 0.15, x_3 = 0.3, x_4 = 0.45$ hartzea.