# Ekuazio Diferentzial Linealezko Sistemak
# Ariketen Emaitzak

**1.-(a)** Balio propioak: $\lambda_1 = -3$ eta $\lambda_2 = -9$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} se^{-3t} + 2re^{-9t} \\ -se^{-3t} + re^{-9t} \end{bmatrix}$$

**1.-(b)** Balio propioak: $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = -2$ eta $\lambda_3 = 3$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{bmatrix}$ , $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ -s \end{bmatrix}$ eta $c^3 = \begin{bmatrix} 2s \\ 3s \\ 3s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} re^{-2t} + 2ue^{3t} \\ se^{-t} - re^{-2t} + 3ue^{3t} \\ -se^{-t} - re^{-2t} + 3ue^{3t} \end{bmatrix}$$

**1.-(c)** Balio propioak: $\lambda = 2$ (balio propio bikoitza)

Bektoreak: $c^2 = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^1 = \begin{bmatrix} s - r \\ r \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(1-t) - r \\ r + st \end{bmatrix} e^{2t}$$

**2.-(a)** Balio propioak: $\lambda_1 = -1$ eta $\lambda_2 = 5$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} -5s \\ s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} se^{-t} - 5re^{5t} \\ se^{-t} + re^{5t} \end{bmatrix}$$

Orduan, $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow s = \dfrac{5}{6}$ eta $r = \dfrac{1}{6}$ beraz,

eskaturiko soluzioa $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5(e^{-t} - e^{5t})}{6} \\ \frac{5e^{-t} + e^{5t}}{6} \end{bmatrix}$

Bestela, $P = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ eginez

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5(e^{-t} - e^{5t})}{6} \\ \frac{5e^{-t} + e^{5t}}{6} \end{bmatrix}$$

**2.-(b)** Balio propioak: $\lambda_1 = -5$ eta $\lambda_2 = 7$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2se^{-5t} + 2re^{7t} \\ se^{-5t} + re^{7t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Orduan, } X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff s = r = \frac{1}{2} \text{ beraz,}$$

$$\text{eskaturiko soluzioa } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{e^{7t}+e^{-5t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ eginez}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{e^{7t}+e^{-5t}}{2} \end{bmatrix}$$

**2.-(c)** Balio propioak: $\lambda_1 = -1$ eta $\lambda_2 = 4$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} 3s \\ 2s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3se^{-t} - re^{4t} \\ 2se^{-t} + re^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Orduan, } X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \iff s = 1 \text{ eta } r = 3 \text{ beraz,}$$

$$\text{eskaturiko soluzioa } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(e^{-t} - e^{4t}) \\ 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ eginez}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(e^{-t} - e^{4t}) \\ 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{bmatrix}$$

**2.-(d)** Balio propioak: $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = -1$ eta $\lambda_3 = -2$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $c^2 = \begin{bmatrix} -5s \\ -2s \\ 2s \end{bmatrix}$ eta $c^3 = \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ 3s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} se^{t} - 5re^{-t} - 2ue^{-2t} \\ -2re^{-t} \\ 2re^{-t} + 3ue^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Orduan, } X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} s = -\frac{11}{6} \\ r = -\frac{1}{2} \\ u = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Beraz, eskaturiko soluzioa } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15e^{-t}-11e^{t}-16e^{-2t}}{6} \\ e^{-t} \\ 4e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \text{ eginez}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15e^{-t}-11e^{t}-16e^{-2t}}{6} \\ e^{-t} \\ 4e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

**2.-(e)** Balio propioak: $\lambda_1 = 2$ eta $\lambda_2 = 3$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ aukeratuz, $\Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Sistemaren soluzioa;

$$X(t) = P\, e^{Dt} ( \int_0^t e^{-Ds}\, P^{-1}\, B(s)\, ds + P^{-1}\, X^0); \text{ non,}$$

$$P^{-1}\, X^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad e^{-Ds}\, P^{-1}\, B(s) = \begin{bmatrix} 2e^{-s} + 36se^{-2s} \\ 2e^{-2s} + 72se^{-3s} \end{bmatrix}$$

Bukatzeko,

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} ( \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-s} + 36se^{-2s} \\ 2e^{-2s} + 72se^{-3s} \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{3t} \\ -2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{-t} - 9e^{-2t}(2t+1) + 9 \\ -e^{-2t} - 8e^{-3t}(3t+1) + 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 9e^{2t} - e^{t} + 6t - 1 \\ 6e^{3t} - 18e^{2t} + 3e^{t} + 12t + 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**2.-(f)**

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t (ts - x_1(s) + 2x_2(s))ds + 2 \\ x_2(t) = \int_0^t (t - x_1(s) + 2x_2(s))ds + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + \frac{3t^2}{2} \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2t \end{cases} \\ x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Balio propioak: $\lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 = 1$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ aukeratuz, $\Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Sistemaren soluzioa;

$$X(t) = P\, e^{Dt}(\int_0^t e^{-Ds}\, P^{-1}\, B(s)\, ds + P^{-1}\, X^0);\ \text{non},$$

$$P^{-1}\, X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad e^{-Ds}\, P^{-1}\, B(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}s^2 - 2s \\ e^{-s}(\frac{3}{2}s^2 + 4s) \end{bmatrix}$$

Bukatzeko,

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} (\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{3}{2}s^2 - 2s \\ e^{-s}(\frac{3}{2}s^2 + 4s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & e^t \\ 1 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^3 - t^2 + 1 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(3t^2 - 2t - 2) + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t + t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \\ e^t + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**3.-(a)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

Balio propioak: $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = 2$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$x(t) = x_1(t) = se^t + re^{2t}$$

**3.-(b)**

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = 6x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Balio propioak: $\lambda_1 = 2$ eta $\lambda_2 = -3$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ -3s \end{bmatrix}$ beraz, soluzio orokorra:

$$x(t) = x_1(t) = se^{2t} + re^{-3t}$$

Orduan, $\begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow s = 3$ eta $r = -2$

beraz, eskaturiko soluzioa, $x(t) = x_1(t) = 3e^{2t} - 2e^{-3t}$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ eginez,}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2e^{-3t} \\ 6e^{2t} + 6e^{-3t} \end{bmatrix}$$

eta eskatzen dena, $x(t) = x_1(t) = 3e^{2t} - 2e^{-3t}$

**4.-** Urontzi bakoitzean gatz kantitatearen bilakaera aztertu ondoren(denbora unitateko satzen den gatz kantitatea - denbora unitateko ateratzen dena), ondoko ekuazio diferentzial linealezko sistema lortuko dugu;

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) = & \frac{-3}{100}x_1(t) - \frac{2}{100}x_2(t) + \frac{1}{200}x_3(t) \\ x_2'(t) = & \frac{1}{100}x_1(t) - \frac{3}{100}x_2(t) + \frac{2}{200}x_3(t) \\ x_3'(t) = & \frac{2}{100}x_1(t) + \frac{1}{100}x_2(t) - \frac{3}{200}x_3(t) \end{array} \right. \\ x_1(0) = 10,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 10 \end{array} \right.$$

Koefizienteen matrizea,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{100} & \frac{2}{100} & \frac{1}{200} \\ \frac{1}{100} & \frac{-3}{100} & \frac{2}{200} \\ \frac{2}{100} & \frac{1}{100} & \frac{-3}{200} \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1/2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}B$$

Bila dezagun $A$ matrizearen balio propioak,

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - \frac{1}{100}B| = \frac{1}{100}|100\lambda I - B| =$$

$$\frac{1}{100} \begin{vmatrix} 100\lambda + 3 & -2 & -1/2 \\ -1 & 100\lambda + 3 & -1 \\ -2 & -1 & 100\lambda + 3/2 \end{vmatrix} = \left( \begin{array}{c} \text{1. lerroari} \\ \text{beste biak batuz} \end{array} \right) =$$

$$\frac{1}{100} \begin{vmatrix} 100\lambda & 100\lambda & 100\lambda \\ -1 & 100\lambda + 3 & -1 \\ -2 & -1 & 100\lambda + 3/2 \end{vmatrix} = \frac{100\lambda}{100} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 100\lambda + 3 & -1 \\ -2 & -1 & 100\lambda + 3/2 \end{vmatrix} =$$

Bigarren eta hirugarren zutabeei lehena kenduz,

$$\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 100\lambda + 4 & 0 \\ -2 & 1 & 100\lambda + 7/2 \end{vmatrix} = \lambda(100\lambda + 4)(100\lambda + 7/2)$$

Beraz, $A$-ren balio propioak,

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4/100 = -1/25,\ \text{eta}\lambda_3 = -7/200 \text{ dira.}$$

Kalkula ditzagun orain, balio propio hauei elkartutako bektore propioak,
**(i)** $(\lambda_1 I - A)c = -Ac = 0$ sistematik, ondoko soluzioa lortzen da,

$$\begin{bmatrix} s/2 \\ s/2 \\ s \end{bmatrix}, \text{ edo nahiago bada, } \begin{bmatrix} s \\ s \\ 2s \end{bmatrix}, \text{ non } s \in R.$$

**(ii)** $(\lambda_2 I - A)c = (-I/25 - B/100)c = 1/100(-4I - B)c = 0$ sistematik

ondokoa, $\begin{bmatrix} -3s/2 \\ s/2 \\ s \end{bmatrix}$, edo beste hau, $\begin{bmatrix} -3s \\ s \\ 2s \end{bmatrix}$, non $s \in R$.

**(iii)** $(\lambda_3 I - A)c = (-7I/200 - B/100)c = 1/200(-7I - 2B)c = 0$, sistematik

soluzio hau, $\begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$, non $s \in R$.

Beraz, sistemaren soluzio orokorra ondokoa,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 2s \end{bmatrix} + e^{-t/25} \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 2r \end{bmatrix} + e^{-7t/200} \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s - 3re^{-t/25} - ue^{-7t/200} \\ s + re^{-t/25} \\ 2s + 2re^{-t/25} + ue^{-7t/200} \end{bmatrix} \quad \text{Bukatzeko,}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} s - 3r - u & = & 10 \\ s + r & = & 0 \\ 2s + 2r + u & = & 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s = 5 \\ r = -5 \\ u = 10 \end{cases}$$

eta eskaturiko sistemaren soluzioa,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e^{-7t/200} + 15e^{-t/25} + 5 \\ 5 - 5e^{-t/25} \\ 10e^{-7t/200} - 10e^{-t/25} + 10 \end{bmatrix}$$

Soluzio berbera lortuko dugu ondoko $P$ matrizea aukeratzen badugu,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

eta ondoko formula aplikatzen badugu,

$$X(t) = P\, e^{Dt}\, P^{-1}\, X^0 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t/25} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7t/200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -10e^{-7t/200} + 15e^{-t/25} + 5 \\ 5 - 5e^{-t/25} \\ 10e^{-7t/200} - 10e^{-t/25} + 10 \end{bmatrix}$$

Denbora asko pasa ondoren, hau da, $t \to +\infty$, orduan,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Orokorrean, $x_1(0) = g_1$, $x_2(0) = g_2$ eta $x_3(0) = g_3$ izango balira, eta $g = g_1 + g_2 + g_3$ izanik, froga daiteke,

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g/4 \\ g/4 \\ g/2 \end{bmatrix} \text{dela.}$$