Koefiziente Konstantedun Ekuazio Diferentzial Linealezko Sistemak

2004/2005 ikasturtea

1. Sarrera

Horrelako sistema bati,

$$
(S)\left\{\begin{array}{rcl}
x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)\;+\;b_1(t)\\
x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)\;+\;b_2(t)\\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)\;+\;b_n(t)
\end{array}\right.
$$

non, $x_i(t)$ aldagai errealeko funtzio errealak, $a_{ij} \in R$ eta $b_i(t)$ funtzio erreal eta jarraituak diren $(1 \leq i, j \leq n)$, *koefiziente konstantedun ekuazzio diferentzial linealezko sistema* esaten zaio.

(S) sistema, era matrizialean idatzita, horrela geratzen da,

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{bmatrix}}_{X'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{bmatrix}}_{B(t)}
$$

eta era laburragoan,

$$X'(t) = A\,X(t)\;+\;B(t)$$

$B(t) = 0$, hau da, $b_i(t) = 0; 1 \leq i \leq n$ denean, sistemari homogenoa deitzen zaio; bestela, sistema osoa.

2. Sistema Homogenoaren Soluzioak

$X'(t) = A\,X(t)$ sistema homogenoaren soluzio orokorra eman aurretik, bila dezagun soluzio partzialen bat

2.1. Sistema Homogenoaren Soluzio bat

Ekuazio bakarra genuenean, $x'(t) = a(t)\, x(t)$ ekuaziotik, $x(t) = K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$ soluzioak aurkitzen genituen. Bestalde, $a(t)$ konstantea bada, $x'(t) = c\, x(t)$ ekuaziotik, $x(t) = K\, e^{ct}$ soluzioak aurkituko ditugu. Ideia honi jarraituz, ikus dezagun $X(t) = e^{\lambda t}\, C$ funtzio bektorialak, $X'(t) = A\, X(t)$ sistemaren soluzioak izan daitezkeen non, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq 0$; $c_i \in R$, bektorea den. Hau da,

$$X(t) = e^{\lambda t}\, C \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x_i(t) = e^{\lambda t} c_i \\ 1 \leq i \leq n \end{array}$$

Izan ere, $X(t) = e^{\lambda t}\, C$ sistema homogenoaren soluzioa izango da baldin, eta soilik baldin,

$$(e^{\lambda t}\, C)' = A\, (e^{\lambda t}\, C) \Longleftrightarrow (\lambda\, e^{\lambda t})\, C = e^{\lambda t}\, (A\, C) \Longleftrightarrow$$
$$\lambda\, C = A\, C \Longleftrightarrow \lambda\, C - A\, C = 0 \Longleftrightarrow (\lambda\, I_n - A)\, C = 0$$

Azter dezagun azken hau,

$$(\lambda\, I_n - A)\, C = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda - a_{11})c_1 - a_{12}c_2 - \cdots - a_{1n}c_n & = & 0 \\ -a_{21}c_1 + (\lambda - a_{22})c_2 - \cdots - a_{2n}c_n & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}c_1 - a_{n2}c_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})c_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Horrelako sistema batek nuluak ez diren soluzioak izateko, koefizienteen matrizearen determinanteak, $\det(\lambda\, I_n - A)$, 0 izan behar du; bestela, $C = 0$ soluzio bakarra izango litzateke. Bestalde, $\det(\lambda\, I_n - A)$ λ -rekiko n mailako polinomio bat izango da eta beraz, gehienez, n erro erreal izango ditu, A **matrizearen balio propioak** deitzen direnak.

Demagun, λ_0, $\det(\lambda\, I_n - A)$ polinomioaren erro sinple bat dela, hau da, A matrizearen balio propio sinple bat. Orduan, $(\lambda_0\, I_n - A)\, C = 0$ sistemak, bateragarria eta indeterminatua denez, C -rako infinitu soluzio izango ditu, λ_0 balio propioari elkartutako A **matrizearen bektore propioak** deitzen direnak, eta beraz, ondoko funtzio bektorial hauek,

$$X(t)=e^{\lambda_0 t}\,C=e^{\lambda_0 t}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overbrace{e^{\lambda_0 t}\,c_1}^{x_1(t)}\\ \underbrace{e^{\lambda_0 t}\,c_2}_{x_2(t)}\\ \vdots\\ \underbrace{e^{\lambda_0 t}\,c_n}_{x_n(t)}\end{bmatrix}$$

sistema homogenoaren soluzioak izango dira.

Adibidea 1 *Azter dezagun ondoko sistema homogenoa:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) &=& x_1(t)-x_2(t)+4x_3(t)\\ x_2'(t) &=& 3x_1(t)+2x_2(t)-x_3(t)\\ x_3'(t) &=& 2x_1(t)+x_2(t)-x_3(t)\end{array}\right.$$

Kasu honetan, $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ eta $\lambda\,I_3-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -4\\ -3 & \lambda-2 & 1\\ -2 & -1 & \lambda+1\end{bmatrix}$

$$\det(\lambda\,I_3-A)=\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)\,(\lambda^2-\lambda-6)\ \text{ eta}$$

$$\det(\lambda\,I_3-A)=0\Longleftrightarrow\lambda=1,\ \lambda=-2\ \text{ edo }\ \lambda=3$$

Hau da, $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ eta $\lambda_3=3$ dira A matrizearen balio propioak.

Kalkula dezagun orain, esate baterako, $\lambda_1=1$ balio propioari elkarturiko bektore propioak; horretarako, ondoko ekuazio linealezko sistema ebatzi behar da:

$$(I_3-A)C=0\Longleftrightarrow\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4\\ -3 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_2-4c_3 &=& 0\\ -3c_1-c_2+c_3 &=& 0\\ -2c_1-c_2+2c_3 &=& 0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} c_1 &=& -s\\ c_2 &=& 4s\\ c_3 &=& s\end{array}\right.\ ;\ s\in R$$

Orduan, bektore propioak, $C=\begin{bmatrix} -s\\ 4s\\ s\end{bmatrix}$; $s\in R$ eta sistemaren soluzioak,

$$X(t)=e^t\,C=\begin{bmatrix} -s\,e^t\\ 4s\,e^t\\ s\,e^t\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) &=& -s\,e^t\\ x_2(t) &=& 4s\,e^t\\ x_3(t) &=& s\,e^t\end{array}\right.\ ;\ s\in R$$

Gauza bera eginez, $\lambda_2=-2$ balio propioari elkartutako bektore propioak,

$$\begin{bmatrix} -s \\ s \\ s \end{bmatrix};\ s \in R \ \text{ eta } \ \lambda_3 = 3 \ \text{ balio propioari elkartutakoak, } \begin{bmatrix} s \\ 2s \\ s \end{bmatrix};\ s \in R$$

direla, konproba daiteke.

Beraz, $X(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -s \\ s \\ s \end{bmatrix};\ s \in R$ eta $X(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} s \\ 2s \\ s \end{bmatrix};\ s \in R$ ere,

ekuazio diferentzial linealezko sistema homogenoaren soluzioak dira.

2.2. Kasu berezia: balio propio multipleak

Demagun λ_0, $\det(\lambda\, In - A) = 0$ ekuazioaren erro multiple bat dela, hau da, A matrizearen balio propio multiple bat. Izan ere, erro edo balio propio bezala, λ_0, s aldiz agertzen bada, ondoko funtzio bektorial hauek ere, sistema homogenoaren soluzioak izango dira,

$$X(t) = (C^1 + C^2\, t + C^3\, t^2 + \cdots + C^s\, t^{s-1})\, e^{\lambda_0 t}$$

non, C^s; λ_0 -ri elkarturiko bektore propioa den eta

C^{s-r}; $(\lambda_0\, I_n - A)\, C^{s-r} = -(s-r)\, C^{s-r+1}$, $1 \leq r \leq s-1$ betetzen duen.

Adibidea 2: aurreko orriaren 9. ariketa

Aipaturiko ariketatik, sistema hau lortzen genuen,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & -\frac{1}{20}\, x_1(t) \\ x_2'(t) & = & \frac{1}{20}\, x_1(t) - \frac{1}{20}\, x_2(t) \end{array} \right. \Longleftrightarrow X'(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} X(t)$$

Orduan, $\det(\lambda\, I_2 - A) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + \frac{1}{20})^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{20}$ (erro bikoitza)

Aurrekoaren arabera, $X(t) = (C^1 + C^2\, t)\, e^{-\frac{1}{20} t}$ funtzioak, sistemaren soluzioak izango dira, non C^2; $-\frac{1}{20}$ balio propioari elkarturiko bektore propioa den eta C^1; $(-\frac{1}{20}\, I_2 - A)\, C^1 = -C^2$, betetzen duen.

Kalkula dezagun C^2

$$(-\frac{1}{20}\, I_2 - A)\, C^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow c_1 = 0$$

Beraz, $C^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix};\ s \in R$ eta C^1 kalkulatzeko,

$$(-\frac{1}{20}\, I_2 - A)\, C^1 = -C^2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \end{bmatrix} \Longleftrightarrow y = 20\, s$$

Beraz, $C^1 = \begin{bmatrix} 20\, s \\ r \end{bmatrix};\ r \in R$ eta sistemaren soluzioak,

$$X(t) = (\begin{bmatrix} 20\,s \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} t)\, e^{-\frac{1}{20}t} = \begin{bmatrix} 20\,s\,e^{-\frac{1}{20}t} \\ (r+st)\,e^{-\frac{1}{20}t} \end{bmatrix};\ s, r \in R$$

Horrez gain, ariketa honetan $x_1(0) = 10$ eta $x_2(0) = 5$ baldintzak hasieratik jartzen ziren. Beraz,

$$x_1(0) = 10 \Longleftrightarrow 20\,s = 10 \Longleftrightarrow s = \frac{1}{2},\ \text{eta hau jakinda, } x_2(0) = 5 \Longleftrightarrow r = 5$$

Eta eskaturiko soluzioa,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,e^{-\frac{1}{20}t} \\ \frac{10+t}{2}\,e^{-\frac{1}{20}t} \end{bmatrix}$$

2.3. Sistema homogenoaren soluzio orokorra

$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t)$ funtzio bektorialak, sistema homogeno baten soluzioak badira, argi dago, $\alpha_1\,X_1(t) + \alpha_2\,X_2(t) + \cdots + \alpha_m\,X_m(t)$; $\alpha_i \in R$, funtzio bektoriala ere, sistemaren beste soluzio bat izango dela. Hala ere, α_i zenbaki errealak ez dugu zertan jarri, C^i, λ_i balio propioari elkarturiko bektore propio bat izanda, $\alpha_i\,C^i$, λ_i -ri elkarturiko beste bektore propio bat izango delako. Esate baterako,

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t} C^i \text{ bada } \Longrightarrow \alpha_i\,X_i(t) = \alpha_i\,e^{\lambda_i t} C^i = e^{\lambda_i t}(\alpha_i\,C^i) = e^{\lambda_i t}\bar{C}^i$$

$X'(t) = A\,X(t)$, n tamainuko ekuazio sistema homogenoa emanda, demagun,

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s,\ A \text{ matrizearen balio propio sinpleak direla,} \\ \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_r,\ \text{balio propio multipleak non, } \delta_i,\ v_i \text{ aldiz agertzen den,} \\ C^1, C^2, \ldots, C^s,\ \lambda_i\ (1 \le i \le s) \text{ balio propioei elkartutako bektore propioak eta} \\ D_1^{v_1}, D_2^{v_2}, \ldots, D_r^{v_r},\ \delta_i\ (1 \le i \le r) \text{ balio propio multiplei elkartutakoak.} \end{cases}$$

Orduan, sistema homogenoaren **soluzio orokorra** horrelakoa izango da:

$$X(t) = \underbrace{e^{\lambda_1 t}C^1 + e^{\lambda_2 t}C^2 + \cdots + e^{\lambda_s t}C^s}_{\lambda_i \text{ -ei dagozkien soluzioak}} + \underbrace{(D_1^1 + D_1^2\,t + \cdots + D_1^{v_1}\,t^{v_1-1})\,e^{\delta_1 t}}_{\delta_1 \text{ -i dagozkion soluzioak}} +$$
$$\underbrace{(D_2^1 + D_2^2\,t + \cdots + D_2^{v_2}\,t^{v_2-1})\,e^{\delta_2 t}}_{\delta_2 \text{ -ri dagozkionak}} + \cdots + \underbrace{(D_r^1 + D_r^2\,t + \cdots + D_r^{v_r}\,t^{v_r-1})\,e^{\delta_r t}}_{\delta_r \text{ -ri dagozkionak}}$$

Adibidea 3 *Ebatz dezagun sistema hau,* $X'(t) = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & -8 & -9 \end{bmatrix} X(t)$

$$\lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda-9 & 4 & 8 \\ 0 & \lambda-7 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+9 \end{bmatrix} \text{ eta } \det(\lambda I_3 - A) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -7, \text{ erro sinplea} \\ \lambda_2 = 7, \text{ erro bikoitza} \end{cases}$$

$\lambda_1 = -7$ balio propioari elkarturiko bektore propioak, $\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 2s \end{bmatrix}$ $s \in R$ dira eta $\lambda_2 = 7$ balio propioari elkarturiko sistemaren soluzioak, $(C^1 + C^2\, t)e^{7t}$ funtzioak dira non, C^2, $\lambda_2 = 7$ balio propioari elkarturiko bektore propio bat eta C^2, $(7\, I_3 - A)C^1 = -C^2$ betetzen duena diren. Izan ere,

$$(7\, I_3 - A)C^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 &= 2s + 4r \\ c_2 &= s \\ c_3 &= r \end{cases} \quad ;\ s, r \in R$$

eta,

$$(7\, I_3 - A)C^1 = -C^2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 4r \\ -s \\ -r \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$s = r = 0 \text{ eta } \begin{cases} c_1 &= 2u + 4v \\ c_2 &= u \\ c_3 &= v \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eta } C^1 = \begin{bmatrix} 2u + 4v \\ u \\ v \end{bmatrix} \ u, v \in R$$

Orduan, sistema homogenoaren soluzio orokorra,

$$X(t) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 2s \end{bmatrix} e^{-7t} + \begin{bmatrix} 2u + 4v \\ u \\ v \end{bmatrix} e^{7t}; \quad s, u, v \in R$$

Horrez gain, $X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ betetzen duen soluzioa, esate baterako, aurkitu nahi bada;

$$\begin{cases} s + 2u + 4v &= 1 \\ u &= 0 \\ 2s + v &= -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s &= -\frac{5}{7} \\ u &= 0 \\ v &= \frac{3}{7} \end{cases} ; \text{ eta,}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ 0 \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix} e^{-7t} + \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ 0 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} e^{7t} = \begin{bmatrix} \frac{12\, e^{7t} - 5\, e^{-7t}}{7} \\ 0 \\ \frac{3\, e^{7t} - 10\, e^{-7t}}{7} \end{bmatrix}$$

3. Sistema Osoaren Soluzioak

Demagun n tamainuko $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ sistema osoa daukagula eta

$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} = X^0$ betetzen duen soluzioa, aurkitu nahi dela.

Suposa dezagun ere, A matrizeak n balio propio desberdin dauzkala; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ez dagoela, beraz, balio propio multiplerik) eta $C^1, C^2, \ldots, C^n$ elkartutako bektore propioak direla.

Balio propioak desberdinak direnez, bektore propioak linealki independenteak izango dira eta, $P = [C^1, C^2, \ldots, C^n]$ $n{\times}n$ ordenako matrizea, C^i aukeraturiko bektore konkretu batzuek osatuta, eraikitzen bada, $\det(P) \neq 0$ izango da, hau da, P^{-1} matrizea existituko da.

Bestalde, badakigu ondoko funtzioa, sistema homogenoaren soluzio bat dela,

$$Z(t) = e^{\lambda_1 t}\,C^1 + e^{\lambda_2 t}\,C^2 + \cdots + e^{\lambda_n t}\,C^n = \underbrace{[C^1, C^2, \ldots, C^n]}_{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Orduan,

$$Z'(t) = A\,Z(t) \Longleftrightarrow (P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix})' = A(P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}) \Longleftrightarrow$$

$$P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = A\,P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow P\,D = A\,P \Longleftrightarrow D = P^{-1}\,A\,P$$

Hasierako sistema osoan, egin dezagun ondoko aldagai aldaketa hau:

$$Y(t) = P^{-1}\,X(t) \text{ Orduan,}$$

$$Y'(t) = P^{-1}\,X'(t) = P^{-1}(A\,X(t) + B(t)) = P^{-1}(A\,P\,Y(t) + B(t)) =$$

$$\underbrace{P^{-1}\,A\,P}_{D}\,Y(t) + \underbrace{P^{-1}\,B(t)}_{H(t)} = D\,Y(t) + H(t) \text{ eta}$$

$$Y(0) = P^{-1}\,X(0) = P^{-1}\,X^0 = Y^0$$

Sistema berria hauxe da,

$$(S')\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t) &=& D\,Y(t)+H(t) \\ Y(0) &=& Y^0 \end{array}\right. \quad ; \text{ eta apur bat garatzen bada,}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y'(t) &=& \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = D\,Y(t)+H(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1\,y_1(t)+h_1(t) \\ \lambda_2\,y_2(t)+h_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n\,y_n(t)+h_n(t) \end{bmatrix} \\ Y(0) &=& \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

Beraz, bilatu nahi diren $y_i(t);\ 1 \le i \le n$ funtzioek ondokoa betetzen dute,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_i'(t) &=& \lambda_i\,y_i(t)+h_i(t) \\ y_i(0) &=& y_i^0 \end{array}\right. \quad \text{eta orduan,}$$

$$y_i(t) = [\int_0^t h_i(s)\,e^{-\int_0^s \lambda_i\,dr}\,ds + y_i^0]\,e^{\int_0^t \lambda_i\,ds} = [\int_0^t h_i(s)\,e^{-\lambda_i s} + y_i^0]\,e^{\lambda_i t}$$

(S') sistemaren soluzioa,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\int_0^t h_1(s)\,e^{-\lambda_1 s} + y_1^0)\,e^{\lambda_1 t} \\ (\int_0^t h_2(s)\,e^{-\lambda_2 s} + y_2^0)\,e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ (\int_0^t h_n(s)\,e^{-\lambda_n s} + y_n^0)\,e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t h_1(s)\,e^{-\lambda_1 s} + y_1^0 \\ \int_0^t h_2(s)\,e^{-\lambda_2 s} + y_2^0 \\ \vdots \\ \int_0^t h_n(s)\,e^{-\lambda_n s} + y_n^0 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{Dt}(\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 s} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda_n s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ \vdots \\ h_n(s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix})$$

$$= e^{Dt}(\int_0^t e^{-Ds}\,H(s)\,ds + Y^0)$$

$Y(t)$ kalkulatu ondoren, aldagai aldaketa deseginez, hau da, $X(t) = P\,Y(t)$ eginez, hasierako sistemaren soluzioa lortuko da,

$$X(t) = P\,Y(t) = P\,e^{Dt}(\int_0^t e^{-Ds}\,H(s)\,ds + Y^0) =$$
$$= P\,e^{Dt}(\int_0^t e^{-Ds}\,P^{-1}\,B(s)\,ds + P^{-1}\,X^0)$$

Oharra 1

Hasierako sistema homogenoa bada, hau da, $B(t) = 0$ bada, $\int_0^t e^{-Ds}\,P^{-1}\,B(s)\,ds = 0$ eta

$$X(t) = P\,e^{Dt}\,P^{-1}\,X^0$$

Adibidea 4 *Ebatz dezagun ondoko sistema*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + x_2(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) & = & 5x_1(t) - 2x_2(t) + e^{3t} \end{array}\right. \quad ; \quad non,\ x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ eta $\det(\lambda\, I_2 - A) = \lambda^2 - 9$

Orduan, $\det(\lambda\, I_2 - A) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 3$ edo $\lambda_2 = -3$

$\lambda_1 = 3$ balio propioari elkarturiko bektore propioak, $\begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ $s \in R$

$\lambda_2 = -3$ balio propioari elkarturiko bektore propioak, $\begin{bmatrix} s \\ -5s \end{bmatrix}$ $s \in R$

Har dezagun $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrizea, orduan, $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Orduan,

$$X(t) = P\,e^{Dt}(\int_0^t e^{-Ds}\,P^{-1}\,B(s)\,ds + P^{-1}\,X^0);\ \text{non,}$$
$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}; \quad P^{-1}\,X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eta}$$

$$e^{-Ds}\,P^{-1}\,B(s) = \begin{bmatrix} e^{-3s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3s} \\ e^{3s} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-3s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{diren.}$$

Bukatzeko,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$
$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-3t} \\ e^{3t} & 5e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,e^{3t} \\ t\,e^{3t} \end{bmatrix}$$