Ekuazio Diferentzialak

2004/2005 ikasturtea

1. Sarrera

Adibidea 1 : Gorputz baten jaurtiketa/erorketa
Demagun altuera batetik, m *masako gorputz bat,* v_0 *abiaduraz jaurtitzen (*$v_0 > 0$ *bada) edo erortzen uzten dela (*$v_0 = 0$ *bada).* t *une bakoitzean gorputzak daraman abiadura,* $v(t)$ *funtzioa, kalkulatu nahi da, grabitatearen indarrak eragiteaz gain, airearen erresistentzi indarrak ere, gorputza eragiten badu. Azken hau, gehienetan abiadurarekiko proportzionala dena,* $k\,v(t)$ *dela suposatuko dugu.*

Orduan Newtonen 2. legearen arabera,

$$F = m\,a \Longleftrightarrow m\,g - k\,v(t) = m\,a(t) = m\,v'(t)$$

Adibide honetan, t eta $v(t)$ funtzioaren arteko erlazio edo ekuazio bat lortu ordez, t, $v(t)$ eta $v'(t)$ funtzioen arteko $mg - k\,v(t) = m\,a(t) = m\,v'(t)$ ekuazioa lortzen da, ekuazio diferentziala deitzen dena.

Orokorrean gauza bera gertatzen da egoera askotan: fenomeno bat kuantitatiboki adierazten duen $y = f(t)$ funtzioa bilatzen dugunean, sarritan, fenomenoa aztertzerakoan, t, $y(t)$ eta t-rekiko $y(t)$-ren deribatu batzuen ($y'(t), y''(t), \ldots$) arteko erlazioa lortzen da, hau da, ekuazio diferentziala. Helburua, lorturiko ekuaziotik $y = f(t)$ funtzioa aurkitzea da, esan ohi den bezala, ekuazio diferentziala integratzea

Aurreko adibidera itzuliz, lorturiko ekuazio diferentziala nola ebazten den oraingoz ez dugu esango baina, konproba daiteke ondoko funtzio guztiak soluzioak direla:

$$v(t) = C\,e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\ ;\ C \in R \text{ edozein izanda}$$

2. Lehen Ordenako Ekuazio Diferentzial Linealak

$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)$$

ekuazioei, non $a(t)$ eta $b(t)$, (α, β) tarte batean, funtzio jarraituak direla eta $x(t)$, (α, β) tartean bilatzen dugun funtzioa dela suposatzen dugun, lehen ordenako ekuazio diferentzial linealak deitzen zaie. Ekuazio diferentziala, funtzio ezezagunaren deribatua agertzen delako; lehen ordenakoa, bakarrik lehen deribatua agertzen delako (2. deribatua agertuko balitz, 2. ordenakoa esango genioke); lineala, $x^1(t)$ agertzen delako ($x^2(t)$ agertuko balitz, koadratikoa edo 2. mailakoa esango genioke)

Horrez gain, $b(t) = 0$, hau da, gai askea funtzio nulua denean, ekuazioa, homogeneoa dela esaten da eta $b(t) \neq 0$ denean, ekuazio osoa.

2.1. Ekuazio Homogenoaren Soluzioa

Demagun, lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal eta homogenoa:

$$x'(t) = a(t)\,x(t); \quad a(t) \text{ jarraitua } (\alpha, \beta) \text{ tartean}$$

Teorema 1 *Orduan,* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *bada, ekuazio homogenoaren soluzio guztiak ondoko funtzioak dira:*

$$x(t) = K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}; \;\; t \in (\alpha, \beta) \text{ eta } K \in R$$

Frogapena:
Lehen, konproba dezagun $x(t) = K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$ funtzioek, ekuazio diferentzial homogenoa betetzen dutela:

$$\begin{aligned} x'(t) &= K\,[e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}]' = K\,[\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds]'\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} = \\ &= K\, a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \quad \text{eta,} \\ a(t)\, x(t) &= a(t)\, K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \end{aligned}$$

Bukatzeko, ikus dezagun ekuazio homogenoaren $x(t)$ edozein soluziok aipaturiko itxura daukala:

$$x(t) = K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \Longleftrightarrow \frac{x(t)}{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}} = K \Longleftrightarrow [\frac{x(t)}{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}]' = 0$$

Konproba dezagun azken hau,

$$\begin{aligned} [\frac{x(t)}{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}]' &= \frac{x'(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \; - \; x(t)\, [e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}]'}{[e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}]^2} = \\ &= \frac{x'(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \; - \; x(t)\, a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}{e^{2\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}} = \\ &= \frac{x'(t) \; - \; x(t)\, a(t)}{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}} = 0 \end{aligned}$$

Beraz, $x'(t) = a(t)\, x(t)$ ekuazio homogenoaren soluzio guztiak, $x(t) = K\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$ funtzioak direla frogaturik geratzen da.

2.2. Ekuazio Osoaren Soluzioa

$x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$ ekuazio osoaren soluzioak, t -rekiko bi funtzioren arteko biderkaduren artean, hau da, $x(t) = u(t)\, v(t)$ funtzioen artean, bilatuko ditugu. Baina, $x(t) = u(t)\, v(t)$ soluzio bat izango da $\Longleftrightarrow$

$$[u(t)\,v(t)]' = a(t)\,[u(t)\,v(t)] + b(t) \Longleftrightarrow$$

$$u'(t)\,v(t) + u(t)\,v'(t) = a(t)\,u(t)\,v(t) + b(t) \Longleftrightarrow$$

$$u'(t)\,v(t) + u(t)\,[v'(t) - a(t)\,v(t)] = b(t) \tag{1}$$

Kortxeteen artean dagoena 0 izango da $\Longleftrightarrow$ $v(t)$ funtzioa, ekuazio homogenoaren soluzio bat bada, hau da, $v(t) = K\,e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$; $t_0 \in (\alpha, \beta)$, bada. Orduan, $K = 1$ eginez, $v(t) = e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$ hartzen badugu, (1) ekuazioa horrela geratuko zaigu,

$$u'(t)\,e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds} = b(t) \Longleftrightarrow u'(t) = b(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$$

Egindakoa laburbilduz, $x(t) = u(t)\,v(t) = u(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$ ekuazio osoaren soluzio bat izango da $\Longleftrightarrow$ $u'(t) = b(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$

Bestalde, kalkulu integraleko oinarrizko lehen teorema aplikatuz,
$\int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds$, funtzioak ere, t -rekiko lehen deribatu berbera dauka,

$$[\int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds]' = b(t)\,e^{-\int_{t_0}^{t}\,a(r)\,dr}$$

eta beraz, lehen deribatu berbera daukaten bi funtzio hauek, konstante batez, soilik, desberdinduko dira, esate baterako,

$$u(t) = \int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds\,+\,C; \quad C \in R$$

Izan ere, ondoko funtzio guztiak, ekuazio osoaren soluzioak dira,

$$x(t) = u(t)\,v(t) = [\int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds\,+\,C]\,e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}; \quad C \in R$$

Hala ere, askotan, $x(t_0) = x_0$ betetzen duten edo (t_0, x_0) puntutik pasatzen diren soluzioak interesatzen zaizkigu baina,

$$x(t_0) = x_0 \Longleftrightarrow [\underbrace{\int_{t_0}^{t_0}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds}_{0} + C]\,\underbrace{e^{\int_{t_0}^{t_0}\,a(s)\,ds}}_{1} = x_0 \Longleftrightarrow C = x_0$$

eta beraz, $x(t_0) = x_0$ betetzen duen edo (t_0, x_0) puntutik pasatzen den soluzio bat, hauxe da,

$$x(t) = [\int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds\,+\,x_0]\,e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$$

Oharra 1 $x(t) = [\int_{t_0}^{t}\,b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s}\,a(r)\,dr}\,ds + x_0]\,e^{\int_{t_0}^{t}\,a(s)\,ds}$ *soluzioa,* $x(t_0) = x_0$ *betetzen duen edo* (t_0, x_0) *puntutik pasatzen den soluzio bakarra da.*

Konprobaketa:

$x_1(t)$ eta $x_2(t)$ soluzioak, baldintza hori beteko balute,

$x'_1(t) = a(t)\,x_1(t) + b(t)$ non $x_1(t_0) = x_0$ eta

$x'_2(t) = a(t)\,x_2(t) + b(t)$ non $x_2(t_0) = x_0$

kenketa eginez,

$$x'_1(t) - x'_2(t) = a(t)\,(\underbrace{x_1(t) - x_2(t)}_{y(t)}) \Longleftrightarrow y'(t) = a(t)\,y(t)$$

Azken ekuazio honen soluzioak, $y(t) = K\,e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$ dira baina,

$$y(t_0) = \begin{cases} K\,e^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,ds} = K \\ x_1(t_0) - x_2(t_0) = x_0 - x_0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow k = 0 \Longleftrightarrow y(t) = 0 \Longleftrightarrow x_1(t) = x_2(t)$$

Oharra 2 $x(t) = [\int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}\,ds \;+\; C]\,e^{\imath nt_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$; $C \in R$ *funtzioak dira ekuazio osoaren soluzio guztiak.*

Konprobaketa:

$\varphi(t)$ ekuazio osoaren soluzio bat bada eta, esate baterako, $\varphi(t_0) = \varphi_0$ bada, badakigu (t_0, φ_0) puntutik pasatzen den soluzio bakarra hauxe dela:

$$\varphi(t) = [\int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr}\,ds \;+\; \varphi_0]\,e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

Adibidea 2: Gorputz baten erorketa

Erorketa bada, $v(0) = v_0 = 0$ eta t -rekiko gorputzak daraman abiadura neurtzen duen funtzioa, $v(t)$, ondoko ekuazioa betetzen zuen:

$$m\,g - k\,v(t) = m\,v'(t);\;\; t \geq 0 \Longleftrightarrow v'(t) = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{a(t)}\,v(t) + \underbrace{g}_{b(t)};\;\; t \geq 0$$

Orduan, $t_0 = 0$ hartuz, $(0, 0)$ puntutik pasatzen den soluzio bakarra,

$$\begin{aligned} v(t) &= [\int_{0}^{t} g\,e^{-\int_0^s -\frac{k}{m}\,dr}\,ds \;+\; 0]\,e^{\int_0^t -\frac{k}{m}\,ds} = [\int_0^t g\,e^{\frac{k}{m}\,s}\,ds\,]\,e^{-\frac{k}{m}\,t} \\ &= \frac{gm}{k}\,[e^{\frac{k}{m}\,t} - 1]\,e^{-\frac{k}{m}\,t} = \frac{gm}{k}\,[1 - e^{-\frac{k}{m}\,t}] \end{aligned}$$

3. Ontziei Buruzko Problemak

Demagun V litroko kapazitatea duen ontzi batek, x_0 kg gatz dituen v_0 litro ur gazi daukala. Bat-batean, hodi batetik, minutuko k_1 gatz-kontzentrazioa (kg/l-koa) duen a litro ur gazi sartzen hasten dira, aldi berean, ontziaren behealdeko isurbide batetik, minutuko b litro nahastura ateratzen direlarik. Denbora pasa ahala, gatz kantitatearen bilakaera aztertu nahi da.

Suposatuko dugu nahastura beti homogenoa dela, hau da, gatza regularki sakabanatzen dela; behar izanez gero, ontziak eragile edo nahasle batzuk dituela suposa daiteke, edukia ongi nahasteko. Ohartu, bestalde, ontziak giza gorputzaren atal bat (bihotza, urdaila, giltzurruna..) errepresenta dezakeela; urak, odola eta gatzak, medikamentu bat, esate baterako.

Harturiko adibidera itzuliz eta denbora adierazteko t aldagaia aukeratuz, izan bitez,

$x(t)$, t unean, ontziak daukan, kg-tan, gatz kantitatea neurtzen duen funtzioa,

$v(t)$, t unean, ontziak daukan, litrotan, ur gaziaren kantitatea neurtzen duen funtzioa. Jakina, $v(t) = v_0 + (a-b)t$ eta

$k(t)$, t unean, ontziko nahasturaren gatz kontzentrazioa neurtzen duena. Orduan,

$k(t) = \frac{x(t)}{v(t)}$ non, $x(0) = x_0$ eta $v(0) = v_0$ diren.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; kontuan harturik, kalkula dezagun, $h > 0$ izanda, $[t, t+h]$ tartean gertaturiko gatzaren gehikuntza ala urripena (Δx),

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = \begin{array}{c} [t,t+h] \text{ denbora tartean} \\ \text{sartu den gatz kantitatea} \end{array} - \begin{array}{c} [t,t+h] \text{ denbora tartean} \\ \text{atera den gatz kantitatea} \end{array}$$

$$= a\,k_1 h - b\int_t^{t+h} k(s)\,ds = a\,k_1 h - b\int_t^{t+h} \frac{x(s)}{v(s)}\,ds$$

Integralen batezbesteko balioaren teorema-ren arabera, $t_1 = t + \theta\,h$; $(0 \le \theta \le 1)$ puntu bat existitzen da non,

$\int_t^{t+h} \frac{x(s)}{v(s)}\,ds = \frac{x(t+\theta\,h)}{v(t+\theta\,h)}\,h$; Orduan,

$$\Delta x = a\,k_1 h - b\,\frac{x(t+\theta\,h)}{v(t+\theta\,h)}\,h \Longrightarrow \frac{\Delta x}{h} = a\,k_1 - b\,\frac{x(t+\theta\,h)}{v(t+\theta\,h)} \text{ eta}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta x}{h} = \boxed{x'(t) = a\,k_1 - b\,\frac{x(t)}{v(t)}}$$

Problema hauetan, aurreko ekuazio diferentzialera ailegatzen da ondoko printzipioari jarraituz:

Oinarrizko Printzipioa: *Denborarekiko gatz kantitatearen bilakaera neurtzen duen funtzioa,* $x'(t)$, *'denbora uniteteko, sartzen den gatza'* $-$ *'denbora uniteteko, ateratzen den gatza'* kenketaren bidez lortzen da, non gogoratu,

$v(t) = v_0 + (a-b)\,t$ eta $x(0) = x_0$ diren

Ekuazio diferentziala ebatziz, $x(t)$ funtzioa, hau da, t unean, ontzian dagoen gatz kantitatea kalkulatuko da eta horri buruzko egin daitezke hainbat galdera erantzungarriak izango dira. Adibide gisa, hartu ariketa orriaren 7. ariketa (ikusi 'ontzi.pdf' edo 'ontzi.ps' dokumentuak)