Zenbakizko Integrazioa

2004/2005 ikasturtea

1. Sarrera

Zenbakizko integrazioaz hitz egiten da, integral mugatu bat, era hurbilduan, kalkulatu nahi denean. Era hurbilduan, era zehatzean kalkulatu ezin delako, bai integratu nahi den funtzioaz, puntu bakar batzuetan hartzen dituen balioak besterik ez direlako ezagutzen, baita funtzioaren jatorrizko funtziorik aurkitzea oso zaila ala ezinezkoa suertatzen delako ere.

Adibidea 1 *Ez gara gai* $f(x) = \frac{x^3}{e^x-1}$ *funtziorako jatorrizko funtziorik aurkitzeko, ezta "Derive" programa ere, eta orduan, nola kalkula dezakegu, esate baterako,* $\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$

Hala ere, "Derivek" ematen duen erantzuna, "aproximar" tekla sakatzean, $4{,}675086969$ *da, benetako baliotzat har dezakeguna.*

$\int_a^b f(x)\,dx$ era hurbilduan kalkulatzeko, normalean egiten dena hauxe da: $[a,b]$ tartean, $f(x)$ funtzioa, dagokion $p(x)$ polinomio interpolatzaile batez ordezkatu eta orduan,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx \quad \text{onartzen da.}$$

Erabilitako polinomio interpolatzailea m mailakoa bada (horretarako $m+1$ puntu behar dira), polinomioa integratzean sortzen den formulari, m ordenako *Newton - Côtes*-en koadraturaren formula esaten zaio. Ezagunenak lehen eta bigarren ordenakoak dira, *Trapezioen* eta *Simpson-en* erregelak deitzen direnak.

2. Trapezioen erregela

$\int_a^b f(x)\,dx$ era hurbilduan kalkulatzen saiatuko gara

2.1. Trapezioen erregela bakuna

$f(x)$ funtzioa, $[a,b]$ tartean dagokion maila bateko polinomio interpolatzaileaz ordezkatuko dugu, hau da, $(a,f(a))$ eta $(b,f(b))$ puntuetatik pasatzen den $p(x)$ polinomioaz. Lagrangeren metodoa dela eta,

$$p(x) = f(a)\,\frac{x-b}{a-b} + f(b)\,\frac{x-a}{b-a} \quad \text{eta beraz}$$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx$$

$$\int_a^b (x-b)\,dx = -\frac{1}{2}(b-a)^2 \text{ eta } \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 \text{ denez,}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]$$

Jakina, $[a,b]$ tartea luze samarra bada, ager daitekeen errorea ere, handia izan daiteke.

Adibidea 2 *Trapezioen erregela bakuna erabiliz,*

$$\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] = 2\,[\frac{125}{e^5-1}+\frac{1}{e-1}] \simeq 2{,}859867\ldots$$

Errorea txikiagoa izan dadin, hasierako $[a,b]$ tartea, beste tarte txikiagotan uniformeki bana daiteke eta azpitarte bakoitzean trapezioen erregela aplikatu.

2.2. Trapezioen erregela konposatua

Demagun hasierako tartea, $[a,b]$, luzera bereko n azpitartetan zatitzen dugula edo $n+1$ puntu, uniformeki banatuta hartzen ditugula:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \text{ non } \left\{ \begin{array}{c} x_i - x_{i-1} = h \\ 1 \le i \le n \end{array} \right. \text{ edo } \left\{ \begin{array}{c} x_i = x_0 + ih \\ 1 \le i \le n \end{array} \right.$$

Orduan,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Baina, $[x_{i-1}, x_i]$, azpitarte bakoitzean, hurbilketa gisa, trapezioen erregela bakuna aplikatuz,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \simeq \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)];\ 1 \le i \le n$$

eta,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2}\,[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \\ &= \frac{h}{2}\,[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}];\ \text{ non } h = \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

Adibidea 3 *Demagun* $\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$ *kalkulatzean, 6 azpitarte hartuta, trapezioen erregela konposatua erabiltzen dugula*

Orduan, $h=\frac{2}{3}$ eta

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx &\simeq \frac{2}{3}\,[\frac{f(1)}{2}+f(\frac{5}{3})+f(\frac{7}{3})+f(3)+f(\frac{11}{3})+f(\frac{13}{3})+\frac{f(5)}{2}]\\ &\simeq 4{,}631405\ldots\end{aligned}$$

3. Simpson-en erregela

Orain, $f(x)$ funtzioa, 2. mailako polinomio interpolatzaileaz ordezkatuko dugu.

3.1. Simpsonen erregela bakuna

Bigarren mailako polinomio interpolatzailea kalkulatzeko hiru puntu behar dugunez, hirugarren puntu gisa, $[a,b]$ tarteko erdipuntua, $c=\frac{a+b}{2}$ hartuko dugu, hau da, $(a,f(a))$, $(c,f(c))$ eta $(b,f(b))$ puntuetatik pasatzen den $p(x)$ polinomio interpolatzailea kalkulatuko dugu. $h=c-a=b-c=\frac{b-a}{2}$ eginez eta Lagrangeren metodoa erabiliz, ondokoa lortuko dugu,

$$\begin{aligned}p(x) &= f(a)\,\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}+f(c)\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+f(b)\,\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\\ &= \frac{f(a)}{2h^2}\,(x-c)(x-b)+\frac{f(c)}{-h^2}\,(x-a)(x-b)+\frac{f(b)}{2h^2}\,(x-a)(x-c)\end{aligned}$$

Orduan,

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)}{2h^2}\int_a^b (x-c)(x-b)\,dx+&\\ +\frac{f(c)}{-h^2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx+\frac{f(b)}{2h^2}\int_a^b (x-a)(x-c)\,dx&\end{aligned}$$

$x-c=t$, aldagai aldaketa eginez, $\displaystyle\int_a^b (x-c)(x-b)\,dx=\int_{-h}^{h} t(t-h)\,dt=\frac{2}{3}\,h^3$

$x-a=t$, aldagai aldaketarekin, $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=\int_0^{2h} t(t-2h)\,dt=-\frac{4}{3}\,h^3$

eta $x-a=t$, berriro eginez, $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-c)\,dx=\int_0^{2h} t(t-h)\,dt=\frac{2}{3}\,h^3$

Beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)}{2h^2}\,\frac{2}{3}\,h^3 + \frac{f(c)}{-h^2}\,\frac{-4}{3}\,h^3 + \frac{f(b)}{2h^2}\,\frac{2}{3}\,h^3$$
$$= \frac{h}{3}\,[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

Adibidea 4 *Simpsonen erregela bakuna dela eta,*

$$\int_1^5 \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx \simeq \frac{2}{3}\,[f(1) + 4f(3) + f(5)]$$
$$= \frac{2}{3}\,[\frac{1}{e-1} + \frac{108}{e^3-1} + \frac{125}{e^5-1}] \simeq 4{,}725779\ldots$$

3.2. Simpsonen erregela konposatua

Demagun integrazio tartea, $[a, b]$, luzera bereko n azpitartetan zatitzen dugula edo $n+1$ puntu, uniformeki banatuta hartzen ditugula:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \ \text{non,} \ \left\{ \begin{array}{c} x_i - x_{i-1} = h \\ 1 \le i \le n \end{array} \right. \quad \text{edo} \ \left\{ \begin{array}{c} x_i = x_0 + ih \\ 1 \le i \le n \end{array} \right.$$

Simpson erregela bakuna hainbat aldiz, p aldiz, aplikatu ahal izateko, n bikoitia izan behar da, $n = 2p$. Orduan,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0=a}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx$$

Baina, $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, azpitartean, hurbilketa gisa, Simpsonen erregela bakuna aplikatzen badugu,

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\,[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})];\ 1 \le i \le \frac{n}{2}$$

eta,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] =$$
$$= \frac{h}{3}\,[\underbrace{f(a) + 4f(x_1) + f(x_2)} + \underbrace{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)} + \cdots + \underbrace{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)}] =$$
$$= \frac{h}{3}\,[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-2)/2)} f(x_{2i}) + f(b)];\ \text{non}\ h = \frac{b-a}{n}$$

Adibidea 5 *Demagun* $\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$ *kalkulatzean, 6 azpitarte hartuta, Simpsonen erregela konposatua erabiltzen dugula*

Orduan, $h = \frac{2}{3}$ eta

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx &\simeq \frac{2}{9}\,[f(1) + 4\,[f(\frac{5}{3}) + f(3) + f(\frac{13}{3})] + 2\,[f(\frac{7}{3}) + f(\frac{11}{3})] + f(5)] \\ &\simeq 4{,}676406\ldots\end{aligned}$$

4. Trapezioen erregelaren errorea

Trapezioen erregela bakuna aplikatu ondoren, agertzen den errorea hauxe izango da;

$$E = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - p_1(x))\,dx$$

Interpolazio errorearen formula dela eta, badakigu,

$$f(x) - p_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,f''(c)\,, \quad c \in (a,b)$$

$f(x)$-en 2. deribatua, $f''(x)$, $[a,b]$ tartean jarraia dela onartuz gero, maximoa (M) eta minimoa (m) hartzen dituela esan dezakegu. Beraz,

$$m \le f''(x) \le M\,, \quad \forall x \in [a,b]$$

eta horren ondorioz,

$$m \le f''(c) \le M\,, \quad \text{izango da.}$$

$b(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b) \le 0 \;\; \forall x \in [a,b]$ denez,

$$M\,b(x) \le f''(c)\,b(x) = f(x) - p_1(x) \le m\,b(x) \quad \text{,eta,}$$

$$\int_a^b M\,b(x)\,dx \le \int_a^b (f(x) - p_1(x))\,dx = E \le \int_a^b m\,b(x)\,dx\,,$$

Azken hau beste era honetara ere, jar dezakegu,

$$M\int_a^b b(x)\,dx \le E \le m\int_a^b b(x)\,dx\,.$$

Egiazta daiteke,

$$\int_a^b b(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12}\,, \quad \text{dela}$$

eta horren ondorioz,

$$-\frac{M(b-a)^3}{12} \le E \le -\frac{m(b-a)^3}{12}\,,$$

hau da,

$$m \leq -\frac{12E}{(b-a)^3} \leq M\,.$$

$f''(x)$ jarraia izanik, m eta M-ren bitarteko balio guztiak hartu egingo ditu, hots, $d \in (a,b)$ puntu bat existituko da, zeinetan,

$$f''(d) = -\frac{12E}{(b-a)^3}\,, \quad \text{den}$$

eta beraz,

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(d) \iff |E| = \frac{(b-a)^3}{12} |f''(d)|\,.$$

Ikus dezagun orain, Trapezioen erregela konposatua aplikatzean sortzen den errorea;

$$E = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - p_i(x))\,dx$$

Lehen ikusi dugunez,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - p_i(x))\,dx = -\frac{h^3 f''(d_i)}{12}\,, \quad \text{non}\, d_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Beraz,

$$E = \sum_{i=1}^{n} -\frac{h^3 f''(d_i)}{12} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(d_i)$$

Lehen bezalaxe, M eta m , $f''(x)$ funtzioak, $[a,b]$ tartean hartzen dituen maximoa eta minimoa badira, orduan,

$$m \leq f''(d_i) \leq M\,, \quad \forall i\,,\, 1 \leq i \leq n$$

eta horren ondorioz,

$$nm \leq \sum_{i=1}^{n} f''(d_i) \leq nM$$

eta

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(d_i) \leq M$$

$f''(x)$ funtzioak, bitarteko balio guztiak hartu behar dituenez, $d \in (a,b)$ puntu bat existituko da, zeinetan,

$$f''(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(d_i) \iff n f''(d) = \sum_{i=1}^{n} f''(d_i)$$

Bukatzeko,

$$E = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(d_i) = -\frac{h^3}{12}\, n\, f''(d) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(d) \quad \text{non}\, d \in (a,b)\, \text{eta}$$

$$|E| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(d)|$$

Adibidea 6 *Azter dezagun* $\int_1^5 \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$ *integrala era hurbilduan kalkulatzean, 6 azpitarte hartuta eta trapezioen erregela erabilita, ager daitekeen errorea*

$$|E| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,|f''(d)| = \frac{4^3}{12\times 6^2}\,|f''(d)|;\ \text{non } d\in(1,5) \text{ den.}$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x}(x^3-6x^2+6x)+e^x(x^3+6x^2-12x)+6x}{(e^x-1)^3}$$

eta $f''(0) = 2$, gero beherakorra da $x = 2{,}0646177\ldots$ punturaino, non $f''(2{,}064\ldots) = -0{,}566057\ldots$ minimoa hartzen duen eta $x = 5$ punturaino gorakorra.
Edozein kasutan,

$$\mid f''(x)\mid \leq \mid f''(2{,}064\ldots)\mid = 0{,}566057\ldots\ \ x\in(1,5)\ \text{eta,}$$

$$|E| < \frac{4^3}{12\times 6^2}\,0{,}566057 \simeq 0{,}08386\ldots$$

5. Simpsonen erregelaren errorea

Simpsonen erregela bakuna aplikatu ondoren, agertzen den errorea hauxe izango da;

$$E = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_2(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-p_2(x))\,dx$$

Interpolazio errorearen formula dela eta, badakigu,

$$f(x)-p_2(x) = \frac{(x-a)(x-c)(x-b)}{3!}\,f'''(s)\,,\quad s\in(a,b)$$

$$x-c = t\,\text{eginez,}\left\{\begin{array}{l} x-a = x-c+c-a = t+h \\ x-b = x-c+c-b = t-h \end{array}\right.$$

$$f(x)-p_2(x) = \frac{t(t-h)(t+h)}{6}\,f'''(s) = \frac{t^3-th^2}{6}\,f'''(s)$$

$f(x)$ funtzioa 3. mailako polinomia balitz, $f'''(x)$ konstantea litzateke eta errorea,

$$E = \int_{-h}^{h} \frac{t^3-th^2}{6}\,f'''(s)\,dt = \frac{f'''(s)}{6}\int_{-h}^{h}(t^3-th^2)\,dt = 0$$

$$\text{Eta beraz,}\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_2(x)\,dx$$

Orokorrean, $f(x)$ funtzioa, $(a, f(a)), (c, f(c))$ eta $(b, f(b)$ puntuetatik pasatzen den $p_3(x)$ polinomio batez ordezkatzen badugu,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p_3(x)\,dx = \int_a^b p_2(x)\,dx$$

eta errorea aurkitzeko $\int_a^b (f(x) - p_3(x))\, dx$ kalkula dezakegu.
Izan bedi $p_3(x)$ polinomioa, $(a, f(a)), (c, f(c))$ eta $(b, f(b))$ puntuetatik pasa eta $p_3'(c) = f'(c)$ betetzen duena. Orduan,

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{f'(c) - p_2'(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-c)(x-b)$$

Izan bitez, $z \neq a, c, b$; $[a, b]$ tarteko puntu konkretu bat,
$a(x) = (x-a)(x-c)^2(x-b)$ polinomioa eta
$F(t) = a(z)(f(t) - p_3(t)) - a(t)(f(z) - p_3(z))$ funtzioa.
Ondokoa betetzen da, $F(a) = F(c) = F(b) = F(z) = 0$ eta $F'(c) = 0$
Beraz, Rolle-ren teorema generalizatua aplikatuz, $d \in (a, b)$ puntu bat existitzen da, non $F^{iv}(d) = 0$

$$F^{iv}(t) = a(z)(f^{iv}(t) - 0) - a^{iv}(t)(f(z) - p_3(z))$$

$$F^{iv}(d) = 0 \Leftrightarrow a(z)f^{iv}(d) - 4!(f(z) - p_3(z)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(z) - p_3(z) = \frac{a(z)f^{iv}(d)}{4!} = \frac{(z-a)(z-c)^2(z-b)}{4!}f^{iv}(d)$$

Eta orokorrean,

$$f(x) - p_3(x) = \frac{(x-a)(x-c)^2(x-b)}{4!}f^{iv}(d_x)$$

$f(x)$-en 4. deribatua, $f^{iv}(x)$, $[a, b]$ tartean jarraia dela onartuz gero, maximoa (M) eta minimoa (m) hartzen dituela esan dezakegu. Beraz,

$$m \le f^{iv}(x) \le M\,,\ \forall x \in [a, b] \text{ eta } m \le f^{iv}(d_x) \le M$$

Eraiki dezagun $b(x) \ge 0$ polinomio hau,

$$b(x) = \frac{-(x-a)(x-c)^2(x-b)}{4!};\ \text{orduan,}$$

$$m\, b(x) \le f^{iv}(d_x)\, b(x) = -(f(x) - p_3(x)) \le M\, b(x) \text{ eta,}$$

$$\int_a^b m\, b(x)\, dx \le \int_a^b -(f(x) - p_3(x))\, dx = -E \le \int_a^b M\, b(x)\, dx\,,$$

$$m \int_a^b b(x)\, dx \le -E \le M \int_a^b b(x)\, dx\,.$$

$$\int_a^b b(x)\, dx = \frac{h^5}{90}\,,\ \text{ eta } h = \frac{b-a}{2} \text{ direnez gero}$$

$$\frac{mh^5}{90} \le -E \le \frac{Mh^5}{90} \Longleftrightarrow m \le -\frac{90E}{h^5} \le M$$

$f^{iv}(x)$ jarraia izanik, m eta M-ren bitarteko balio guztiak hartu egingo ditu, hots, $\alpha \in (a, b)$ puntu bat existituko da, zeinetan,

$$f^{iv}(\alpha) = -\frac{90E}{h^5}\,, \quad \text{den}$$

eta beraz,

$$E = -\frac{h^5}{90}\, f^{iv}(\alpha) \iff |E| = \frac{h^5}{90}\, |f^{iv}(\alpha)|\,.$$

Ikus dezagun orain, Simpsonen erregela konposatua aplikatzean sortzen den errorea;

$$E = \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (f(x) - p_i(x))\, dx$$

Lehen ikusi dugunez,

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (f(x) - p_i(x))\, dx = -\frac{h^5}{90} f^{iv}(d_i)\,, \quad \text{non}\, d_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$$

Beraz,

$$E = \sum_{i=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{iv}(d_i) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{iv}(d_i)$$

Trapezioen erregelari zegokion errorea aztertzeko erabilitako errazonemandu berberari jarraituz, posiblea da $d \in (a, b)$ puntu bat aurkitzea non,

$$f^{iv}(d) = \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} f^{iv}(d_i)$$

eta beraz,

$$E = -\frac{h^5}{90}\frac{n}{2}\, f^{iv}(d) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\, f^{iv}(d) \iff |E| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\, |f^{iv}(d)|\,.$$

Adibidea 7 *Azter dezagun* $\int_1^5 \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$ *integrala era hurbilduan kalkulatzean, 6 azpitarte hartuta eta Simpsonen erregela erabilita, ager daitekeen errorea*

$$|E| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\, |f^{iv}(d)| = \frac{4^5}{180 \times 6^4}\, |f^{iv}(d)|; \text{ non } d \in (1, 5) \text{ den.}$$

$$f^{iv}(x) = \frac{e^{4x}(x^3 - 12x^2 + 36x - 24) + e^{3x}(11x^3 - 36x^2 - 36x + 72)}{(e^x - 1)^5}$$
$$\frac{e^{2x}(11x^3 + 36x^2 - 36x - 72) + e^x(x^3 + 12x^2 + 36x + 24)}{(e^x - 1)^5}$$

eta $f^{iv}(0) = 2$, gero beherakorra da $x = 4{,}289315\ldots$ punturaino, non $f^{iv}(2{,}064\ldots) = -0{,}139743\ldots$ minimoa hartzen duen eta $x = 5$ punturaino gorakorra.
Edozein kasutan,

$$|\, f^{iv}(x)\, | < f^{iv}(1) = 1{,}551624\ldots \quad x \in (1, 5) \text{ eta,}$$

$$|E| < \frac{4^5}{180 \times 6^4}\, 1{,}551624 \simeq 0{,}0068\ldots$$