Interpolazio Polinomikoa

2004/2005 ikasturtea

1. Sarrera

Ondoko problemak plantea daitezke

1.1. Problema 1

Demagun laborategiko esperimentu batetik (denborarekiko toxina baten desargepena, esate baterako), funtzio batek hainbat puntutan hartzen dituen balioak lortzen ditugula. Nahiz eta funtzioa bera ezagutu ez (esprezioa), gutxienez tarte batean gutxi gorabehera ezagutzea izango dugu helburu.

1.2. Problema 2

$\sin(f(x)), \cos(f(x)), \cdots, e^{f(x)}, \ln(f(x)), \cdots$ funtzioak, askotan agertzen dira eta hartzen dituzten balio gehienak zenbaki irrazionalak direnez, kalkulagailurik gabe aurkitzea zail samarra suertatuko zaigu. Egongo al da metodoren bat balio hauek, gutxi gorabehera ezagutzeko?

1.3. Problema Teorikoa

Izan bedi $f : R \longrightarrow R$, aldagai errealeko funtzio erreala, eta demagun $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$ puntu desberdinetan $f(x)$ funtzioak hartzen dituen balioak, $y_1, y_2, \cdots, y_n$, ezagunak direla. Helburua, $g(x)$ funtzio erraza ($f(x)$ baino errazagoa) aurkitzea da zeinek, x_i puntuetan $f(x)$ funtzioak hartzen dituen balio berberak hartzen dituen:

$$f(x_i) = g(x_i) = y_i$$
$$1 \leq i \leq n$$

Horrelako funtzio bati $f(x)$-en funtzio interpolatzailea esaten zaio eta funtzio interpolatzailerik sinpleenak polinomioak dira, izan ere, geuk aztertuko ditugunak.

2. Polinomio interpolatzailea

Demagun $f(x)$ funtzio batek, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n \in R$ puntu desberdinetan $y_1, y_2, \cdots, y_n \in R$ balioak hartzen dituela: $f(x_i) = y_i$; $1 \leq i \leq n$ eta bilatuko dugu $p(x)$ polinomio bat zeinek $p(x_i) = f(x_i) = y_i$; $1 \leq i \leq n$ betetzen duen edo, gauza bera dena, (x_i, y_i); $1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen den.

Hasieran n datu ditugunez (n ekuazio), oraingoz, suposatuko dugu polinomioaren maila $n-1$ izango dela (n koefiziente edo ezezagun):

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Beraz, hasierako n datuak kontuan harturik, ondoko ekuazio linealezko sistema eraiki daiteke:

$$\begin{array}{c} p(x_i) = f(x_i) = y_i \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} & = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} & = y_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} & = y_n \end{cases}$$

Sistema honek soluziorik badauka, $f(x)$ funtzioa interpolatzen duen gehienez $n-1$ mailako polinomio bat aurkituko dugu. Hala ere, $n > 3$ denean, sortzen diren sistemak ebaztea korapilotsuegia izaten da eta hobe genuke beste metodoren bat bilatzea.

Adibidea 1 *Aurki dezagun* $(-1,6),(0,1)$ *eta* $(2,3)$ *puntuetatik pasatzen den 2. mailako polinomioa.*

Soluzioa: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ bada, ondoko sistema eraiki daiteke:

$$\begin{array}{l} p(-1) = 6 \\ p(0) = 1 \\ p(2) = 3 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 & = 6 \\ a_0 & = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 & = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -3 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

Beraz, eskaturiko polinomioa $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ da.

3. Lagrange-ren Metodoa

Joseph Louis Lagrange(1736 Turin-1813 Paris)

Teorema 1 *Ondoko formularen bidez lortzen den polinomioa,* (x_i, y_i); $1 \leq i \leq n$ *puntuetatik pasatzen den, gehienez,* $n-1$ *mailako polinomio bakarra da:*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x) \text{ ; non } L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ ; } 1 \leq i \leq n$$

Frogapena: $L_i(x)$ polinomioak, Lagrangeren koefizienteak deitzen direnak, $(n-1)$ mailakoak direnez, $p(x)$ polinomioa, gehienez, $(n-1)$ mailakoa izango da.
Bestalde,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ bada} \\ 1, & i = j \text{ bada} \end{cases} \text{ eta beraz, } p(x_j) = y_j \text{ ; } 1 \leq j \leq n$$

Bukatzeko, $p(x)$ eta $q(x)$ horrelako bi polinomio izango balira, $r(x) = p(x) - q(x)$ definituriko polinomioa, gehienez, $(n-1)$ mailakoa izateaz gain, $r(x_i) =$

$p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0$, hau da, n erro izango lituzke eta beraz, $r(x) = 0$, edo gauza bera dena, $p(x) = q(x)$

Adibidea 2 *Aurreneko adibide bera harturik,*

$$L_1(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3},\ L_2(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 \text{ eta } L_3(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{6}$$

Orduan, Lagrangeren metodoaz lortzen den polinomioa hauxe da:

$$p(x) = 6L_1(x) + L_2(x) + 3L_3(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

4. Interpolazio Polinomikoaren Errorea

Demagun $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, $[a,b]$ tarteko n puntu desberdin ditugula eta $p(x)$ polinomioak, x_i puntuetan, $f(x)$ funtzioa interpolatzen duela, hau da, $p(x_i) = f(x_i);\ 1 \leq i \leq n$

Orduan, pensa daiteke $[a,b]$ tartean $p(x)$ polinomioa, $f(x)$ funtzioaren hurbilketa bat dela, hots, $p(x) \simeq f(x);\ x \in [a,b]$. Izan ere, $z \in [a,b]$ izanda, $f(z)$ baliotzat $p(z)$ balioa hartzen badugu, interesgarria izango da agertzen den errorea ezagutzea.

Teorema 2 *Demagun $[a,b]$ tarte batean $f(x)$ funtzioaren aurreneko n deribatuak existitu eta jarraiak direla eta $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, puntuetan $p(x)$, $f(x)$ funtzioaren polinomio interpolatzailea dela. Orduan, $z \in [a,b]$ puntuan agertzen den interpolazioaren errorea hauxe da:*

$$|E_z| = |f(z) - p(z)| = \frac{|(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)|}{n!} |f^{(n)}(c)|; \text{ non } c \in (a,b) \text{ den.}$$

Frogapena: z interpolazio puntu bat bada, $z = x_i$, i baterako, argi dago $|E_z| = 0$

Demagun orain, $z \neq x_i$, $\forall i$ eta izan bitez,

$a(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ n mailako polinomioa eta

$g(x) = a(z)[f(x) - p(x)] - a(x)[f(z) - p(z)]$ funtzioa.

$f(x), a(x)$ eta $p(x)$ n aldiz deribagarriak direnez, azken biak polinomioak izateagatik, $g(x)$ ere, n aldiz deribagarria izango da.

Horrez gain, $g(z) = g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_n) = 0$ eta beraz, Rolleren Teorema Generalizatua esaten digu $c \in (a,b)$ puntu bat existitzen dela non, $g^{(n)}(c) = 0$ den. Baina,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= a(z)[f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)] - a^{(n)}(x)[f(z) - p(z)] \\ &= a(z)f^{(n)}(x) - n!(f(z) - p(z)) \end{aligned}$$

Orduan, $g^{(n)}(c) = 0 \iff a(z)f^{(n)}(c) - n!(f(z) - p(z)) = 0 \iff$

$$|f(z) - p(z)| = \frac{|a(z)f^{(n)}(c)|}{n!} = \frac{|(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)|}{n!} |f^{(n)}(c)|$$

4.1. Kasu Berezia

Askotan, x_i puntuak uniformeki banatuak hartzen dira, hau da,
$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = h$, $2 \leq i \leq n$ izanda.
Orduan, $x_i = x_1 + (i-1)h$, $2 \leq i \leq n$ eta $z \in [a,b] = [x_1, x_n]$ bada, $z = x_1 + th$ non $0 \leq t \leq n-1$ den.
Errorearen formulan agerturiko $z - x_i = (t - i + 1)h$ izango dira; biderkadura,

$$(z - x_1)(z - x_2)\cdots(z - x_n) = th(t-1)h\cdots(t-n+1)h = \prod_{i=0}^{n}(t-i)\,h^n$$

eta errorearen formula,

$$\mid E_z \mid = \mid f(z) - p(z) \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{n}(t-i) \mid \; h^n}{n!} \mid f^{(n)}(c) \mid$$

non $t \in R$, $z = x_1 + th$ betetzen duena eta $c \in (a,b)$ diren.

Adibidea 3 *Demagun* $[0, \pi/2]$ *tartean eta uniformeki banaturiko lau puntu harturik* $f(x) = \cos x$ *funtzioa interpolatu nahi dela.*
i) *Kalkula ezazu* $x = \pi/4$ *puntuan agertutako errorea*
ii) *Kalkula ezazu* $[0, \pi/2]$ *tarteko edozein puntutan agertutakoa*
iii) *Zer egin beharko genuke lau zifra dezimal zehatz lortu ahal izateko?*

Interpolazio puntuak, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = \pi/3$ eta $x_4 = \pi/2$ izango dira eta puntu hauetan hartzen diren balioak, $y_1 = \cos 0 = 1$, $y_2 = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $y_3 = \cos(\pi/3) = 1/2$ eta $y_4 = \cos(\pi/2) = 0$

i) $\mid E_{\pi/4} \mid = \mid f(\pi/4) - p(\pi/4) \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{3}(t-i) \mid \, h^4}{4!} \mid f^{(iv)}(c) \mid$
non $h = \pi/6$, $c \in (0, \pi/2)$ eta $t; \pi/4 = 0 + t\pi/6 \Leftrightarrow t = 3/2$ diren.

$\mid \prod_{i=0}^{3}(t-i) \mid = 9/16$ eta $\mid f^{(iv)}(x) \mid = \mid \cos x \mid < 1, \; 0 < x < \pi/2$

Beraz, $\mid E_{\pi/4} \mid < \frac{9}{16}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \frac{1}{24} = \frac{\pi^4}{55296} \simeq 0{,}00176159\ldots$

ii) $z \in (0, \pi/2)$ edozein izanda ere,

$$\mid E_z \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{3}(t-i) \mid \; h^4}{4!} \mid f^{(iv)}(c) \mid$$

non $h = \pi/6$, $\mid f^{(iv)}(c) \mid < 1$ eta $t; 0 < t < 3$ ezezaguna diren.
Konproba daiteke, $\mid \prod_{i=0}^{3}(t-i) \mid \leq 1 \; 0 < t < 3$, eta beraz,

$$\mid E_z \mid < \frac{(\pi/6)^4}{4!} = \frac{\pi^4}{31104} \simeq 0{,}00313172\ldots$$

iii) Ikusi berri dugu harturiko lau puntuekin bi zifra dezimal zehatz besterik ez dugula lortzen. Orduan, puntu kopurua mantenduz, lau zifra dezimal zehatz lortzeko, lau puntu berri hartu beharko dugu, beraien arteko h diferentzia berri batekin. Puntu berriak edozein izanda,

$$| E |= \frac{| \prod_{i=0}^{3} (t-i) | \ h^4}{4!} \ | f^{iv}(c) | < \frac{h^4}{4!} \text{ eta}$$

$$\frac{h^4}{4!} < 5 \times 10^{-5} \Longleftrightarrow h < 0{,}1861\ldots$$

Horrelako h batekin, ondoko interpolazio puntuak har daitezke
x_1, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_1 + 2h$, $x_4 = x_1 + 3h$ eta ziur egongo gara
$[x_1, x_4] \subset [0, \pi/2]$ azpitartean, 4 zifra dezimal zehatz lortzen direla.

Esate baterako, $h = \pi/24 \simeq 0{,}1308\ldots$ hartzen badugu,

$x_1 = \pi/24$, $x_2 = \pi/12$, $x_3 = \pi/8$ eta $x_4 = \pi/6$; izan daitezke eta interpolazioa dela eta, $[\pi/24, \pi/6]$ azpitartean, 4 zifra dezimal zehatz lortuko dira.

5. Newton-en Metodoa

Planteatzen da honako problema hau,

Problema 1 *$p(x)$, (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea izanik, s puntu gehiago $(x_{n+1}, y_{n+1}), \cdots, (x_{n+s}, y_{n+s})$ hartzen badira, nola kalkulatuko genuke puntu guztietatik pasatzen den polinomio interpolatzaile berria?*

$b(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ n mailako polinomioa da, zeinek
$b(x_i) = 0;\ 1 \leq i \leq n$ den.

Beraz, $p(x) + kb(x)$ polinomioak dira, gehienez, n mailako eta
$(x_i, y_i),\ 1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen direnak

$p(x) + (a_0 + a_1 x)b(x)$ polinomioak, gehienez, $(n + 1)$ mailako eta
$(x_i, y_i),\ 1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen direnak eta ...

$q(x) = p(x) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{s-1} x^{s-1})b(x)$ polinomioak, gehienez, $(n + s - 1)$ mailako eta $(x_i, y_i),\ 1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen direnak.

Hauetako bat da bilatzen duguna, hain zuzen ere, $q(x)$ polinomioari,

$$q(x_{n+1}) = y_{n+1}, q(x_{n+2}) = y_{n+2}, \ldots, q(x_{n+s}) = y_{n+s}$$

betetzera behartzen badiogu, $a_j;\ 1 \leq j \leq s - 1$ koefizienteak aurkituko ditugu eta beraz, puntu guztietatik pasatzen den, gehienez, $(n + s - 1)$ mailako polinomio bat, hau da, polinomio interpolatzailea aurkituko dugu.

Adibidea 4 *Ikusita daukagu, $(-1, 6), (0, 1), (2, 3)$ puntuetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ dela. $(1, -2)$ eta $(3, -2)$ puntuak ere, hartzen baditugu, zein izango da polinomio interpolatzaile berria?*

Soluzioa: Horrelakoa:

$$\begin{aligned} q(x) &= p(x) + (a_0 + a_1 x)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= 2x^2 - 3x + 1 + (a_0 + a_1 x)(x + 1)x(x - 2) \end{aligned}$$

Horrez gain,

$$\left\{\begin{array}{l} q(1) = -2 \\ q(3) = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} a_0 + a_1 & = & 1 \\ a_0 + 3a_1 & = & -1 \end{array}\right. \iff a_0 = 2 \text{ eta } a_1 = -1$$

eta orduan,

$$q(x) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

5.1. Newton-en Metodoa

Sir Isaac Newton(1643 Woolsthorpe - 1727 Londres)
Natura eta bere legeak, ilunpean ezkutatzen ziren. 'Newton jaio dadila', esan zuen Jainkoak, eta argia agertu zen (Alejandro Pope)

Aztertu berri den prozeduran, inplizituki, polinomio interpolatzailea aurkitzeko beste metodo bat dago (Newtonena). Izan ere, (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$ puntuetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea kalkulatzeko, ondokoa plantea daiteke:

(x_1, y_1) puntutik pasatzen den pol. interpolatzailea, $p_1(x) = y_1$ izango da.

(x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuetatik pasatzen dena,

$$p_2(x) = p_1(x) + c_1(x - x_1) = y_1 + c_1(x - x_1)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ eta (x_3, y_3) puntuetatik pasatzen dena,

$$p_3(x) = p_2(x) + c_2(x - x_1)(x - x_2) = y_1 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2)$$

...

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ puntuetatik pasatzen dena,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_{n-1}(x) + c_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= y_1 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

non,

$$\left\{\begin{array}{lcrl} q(x_2) = y_2 & \Longrightarrow & c_1 = & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ q(x_3) = y_3 & \Longrightarrow & c_2 = & \frac{y_3 - p_2(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q(x_n) = y_n & \Longrightarrow & c_{n-1} = & \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \end{array}\right.$$

Adibidea 5 *Newtonen metodoa dela eta, kalkula dezagun, berriro ere, ondoko puntuetatik pasatzen den polinomio interpolatzailea:* $(-1, 6), (0, 1), (1, -2), (2, 3), (3, -2)$

Soluzioa:

$$\begin{array}{llll} & & & p_1(x) = 6 \\ c_1 = -5 & \text{eta} & & p_2(x) = 1 - 5x \\ c_2 = 1 & \text{eta} & & p_3(x) = x^2 - 4x + 1 \\ c_3 = 1 & \text{eta} & & p_4(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1 \\ c_4 = -1 & \text{eta} & p(x) = & p_5(x) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 7x + 1 \end{array}$$