

Cálculo y Álgebra
1º de Ciencias Ambientales
Grupo 16
Fascículo 1º

Profesor Juan-Miguel Gracia

23 de septiembre de 2002

Capítulo 1

Repaso del Cálculo Infinitesimal

1. Teoremas Principales

Se necesitará que el alumno conozca los teoremas siguientes del Cálculo Infinitesimal de funciones reales de una variable real.

Teorema 1 (Teorema del valor intermedio) *Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un número tal que $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.*

Observación.- Evidentemente, se mantiene un resultado similar si $f(a) > f(b)$.

Teorema 2 (Teorema de valor medio para derivadas) *Si f es una función real continua en $[a, b]$, que es derivable en (a, b) , entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0).$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio para derivadas

Este resultado es obvio si consideramos que la pendiente m de la recta tangente $y = mx + b$ a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, es igual a $f'(x_0)$.

Viendo la figura 1.2 resulta obvio que debe haber un punto (al menos) en la curva $y = f(x)$ en el que la tangente es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. De hecho, en la figura 1.2, se tiene que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) = f'(x_1).$$

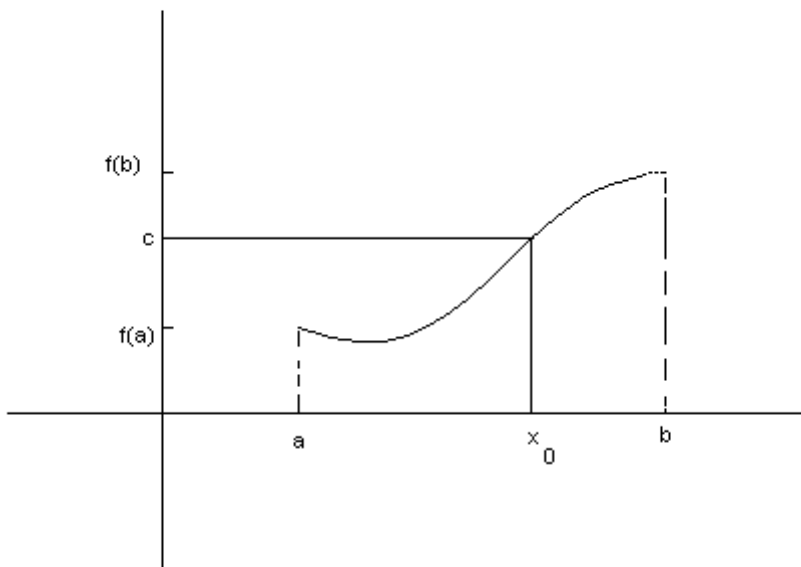


Figura 1.1: Teorema del valor intermedio

Interpretación cinemática del teorema del valor medio para derivadas

Una interpretación cinemática de este teorema es que la velocidad media de un coche en un trayecto es igual a su velocidad instantánea en cierto instante: Supongamos que un coche va por una autopista desde el punto A hasta el punto B . Sean $f(t)$ los kilómetros que ha recorrido el coche desde A hasta el tiempo t —medido en horas—. La derivada de esta función $v(t) := f'(t)$ es la velocidad (instantánea) del coche en el momento t . Supongamos que desde A hasta B hay una distancia de 230 km. y que el coche tarda 2 horas en hacer este recorrido. Entonces la velocidad media del coche en este trayecto total es de $230/2 = 115$ km/h. El teorema del valor medio implica que al menos en algún instante t_0 la velocidad del coche ha sido exactamente igual a 115 km/h: $v(t_0) = 115$, pues existe un $t_0 \in (0, 2)$ tal que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(t_0)$$

Este hecho matemático resulta evidente a partir de nuestra experiencia como viajeros de coches. Pues si nuestro coche nunca hubiera ido a 115 km/h sería porque siempre habría ido a una velocidad mayor que 115 km/h, o a una velocidad menor que 115 km/h. No podría ser que hubiera ido todo el rato

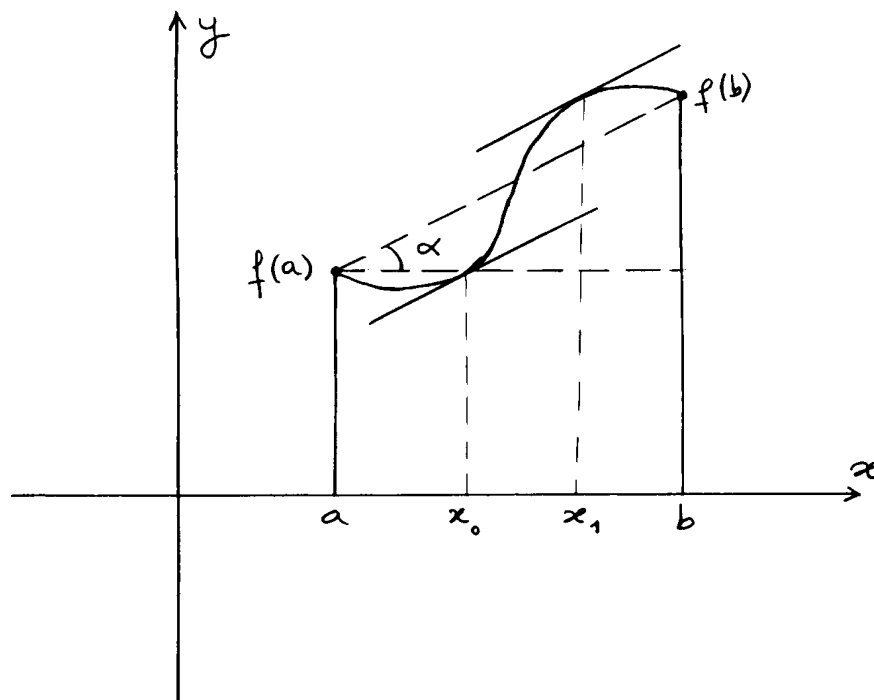


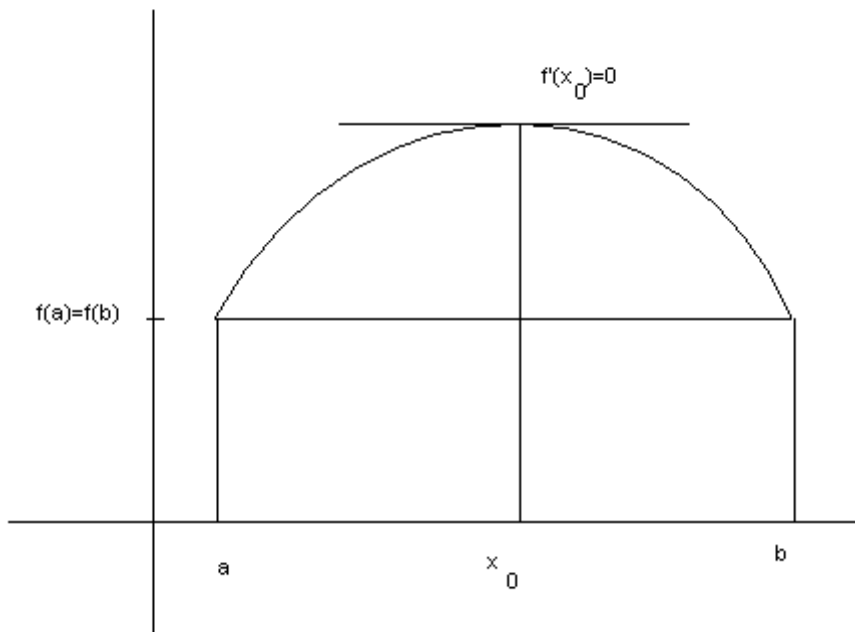
Figura 1.2: Teorema del valor medio

a una velocidad mayor que 115 km/h, pues arrancaría de estar parado y, por lo tanto, al principio su velocidad sería muy pequeña. En consecuencia, siempre habría ido a menos de 115 km/h. Pero, en este caso, habría tardado en hacer el viaje más de 2 horas. Lo que sería una contradicción.

Un caso particular del Teorema 2 es el

Teorema 3 (Rolle) Si f es una función real continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = 0.$$



Teorema 4 (Teorema de Rolle Generalizado) Supongamos que f es una función real continua en $[a, b]$ y que admite derivada de orden n en (a, b) ; es decir, que existen $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Si $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ y se verifica que $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f^{(n)}(c) = 0.$$

Teorema 5 (Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal) Sea f una función real integrable sobre $[a, b]$ y definamos F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

En estas condiciones F es continua en $[a, b]$.

Si, además, f es continua en un punto $x_0 \in [a, b]$, entonces F es derivable en x_0 , y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Corolario 1 .

Si f es una función continua en $[a, b]$ y si definimos

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

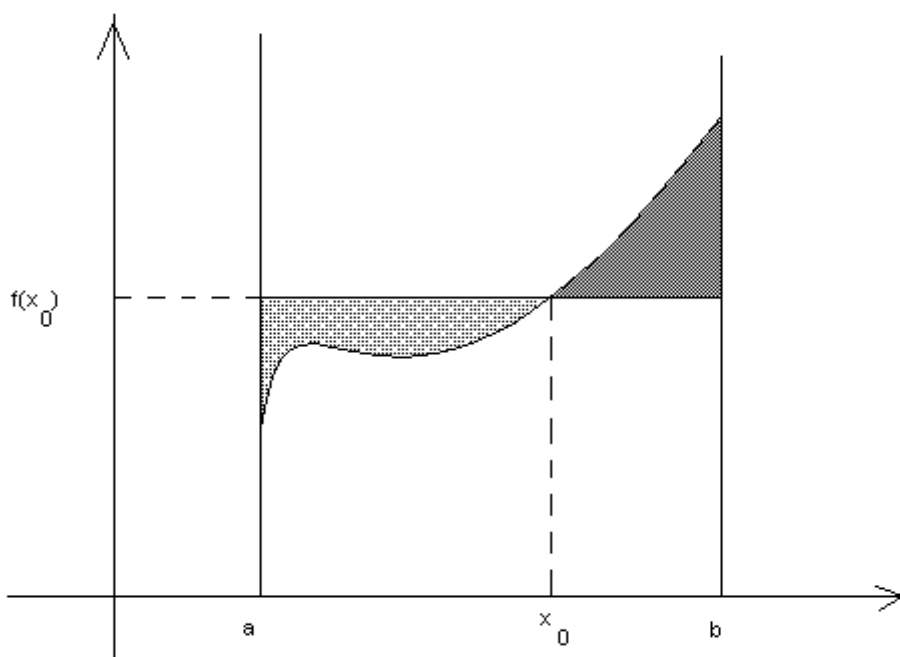
Teorema 6 (Regla de Barrow) Si f una función integrable en $[a, b]$ y si existe una función derivable g en $[a, b]$, tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a).$$

Observación.- Se conviene que $g(x)|_a^b := g(b) - g(a)$.

Teorema 7 (Teorema de valor medio para integrales) Sea f continua en $[a, b]$. Entonces existe un número $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(x_0).$$



Referencias

M. Spivak: *Calculus*, 2 volúmenes.

W. Rudin: *Principios de Análisis Matemático*.

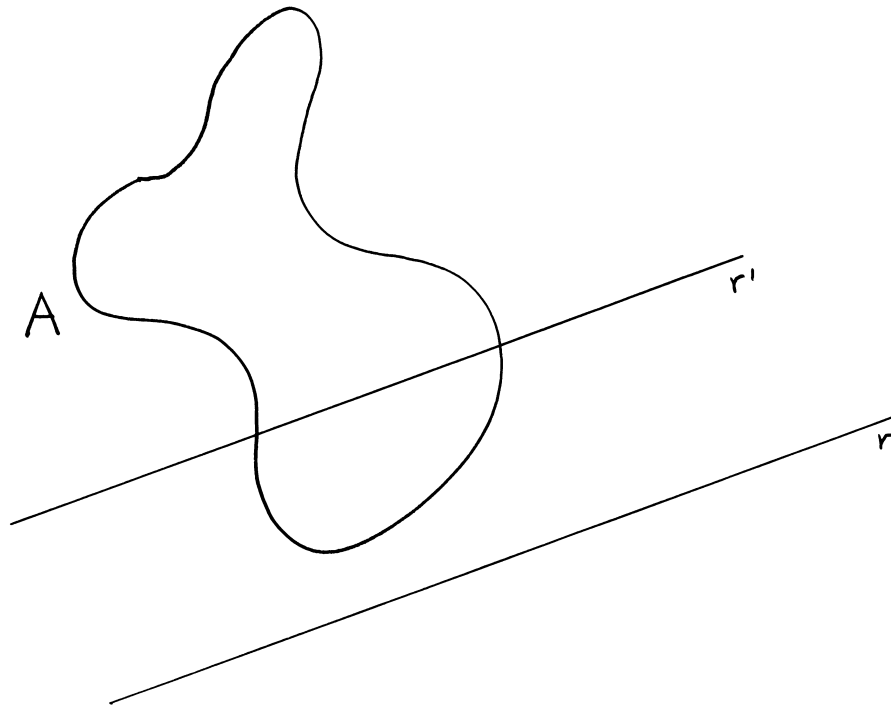
J.H. Mathews: *Numerical Methods*.

-
- Teorema 1: Spivak, pág. 141 (Teorema 1) y pág. 145 (Teorema 4).
Rudin, Capítulo 4, Sección 4.23.
- Teorema 2: Spivak, pág. 248 (Teorema 4); pág. 247 (Teorema 3).
Rudin, Capítulo 5, Sección 5.10.
- Teorema 4: Mathews, pág. 6, (Theorem 1.8).
- Teorema 5: Spivak, pág. 357 (Teorema 1).
Rudin, Capítulo 6, Sección 6.20.
- Teorema 6: Spivak, pág. 361 (Corolario); pág. 363 (Teorema 2).
Rudin, Capítulo 6, Sección 6.21.
- Teorema 7: Spivak, pág. 354, Ejercicio 27 (b).

2. Gráficas de funciones. Ejercicios

Ejercicio 1.

Sean A la región del plano encerrada por la curva cerrada y r una recta que no corta a A :



Demuéstrese que existe una recta paralela a r que corta a la región A en dos regiones de igual área.

Ejercicio 2.

Un día, a las 8 de la mañana un monje partió de su monasterio y subió andando a lo alto de una montaña, permaneciendo allí en meditación el resto del día y la noche siguiente. A las 8 de la mañana del día siguiente, salió de la montaña para volver al monasterio.

Demuéstrese que existe un punto del camino por el que el monje pasó a la misma hora a la subida que a la bajada.

Ejercicio 3.

Demuéstrese que si $f(x)$ es una función que verifica

$$f(2) = 3$$

y

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2},$$

entonces

$$f(x) = x^2 \left[\frac{3}{4} + \int_2^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2} dt \right].$$

Ejercicio 4.

Hállense la función $g(x)$ y la constante K sabiendo que para todo número real x se verifica que

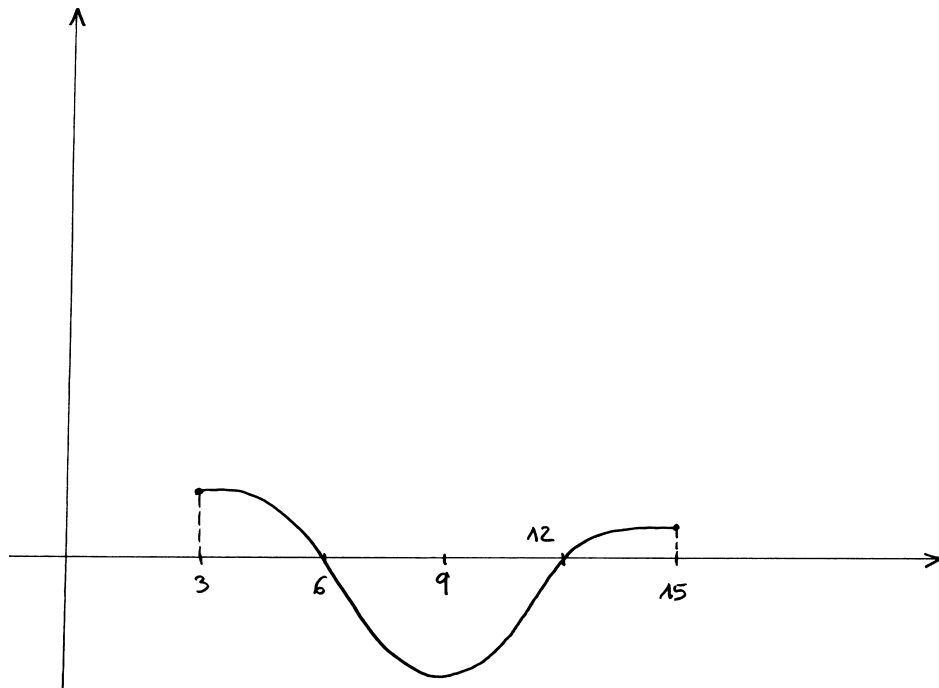
$$\int_1^x g(t) dt + \int_0^x g(t) t dt = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \ln \sqrt{1+x^2} + K.$$

Ejercicio 5.

Dígase todo lo que se pueda de la gráfica $y = F(x)$ de la función

$$F(x) := \int_3^x f(t) dt,$$

sabiendo que la gráfica de f es

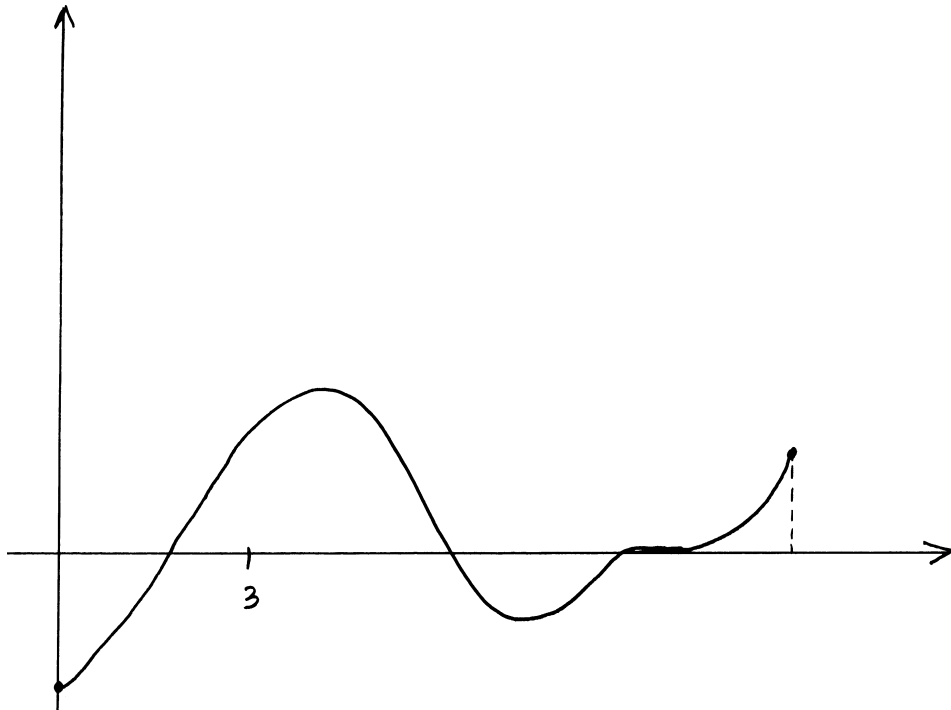


Ejercicio 6.

Dígase todo lo que se pueda de la gráfica $y = F(x)$ de la función

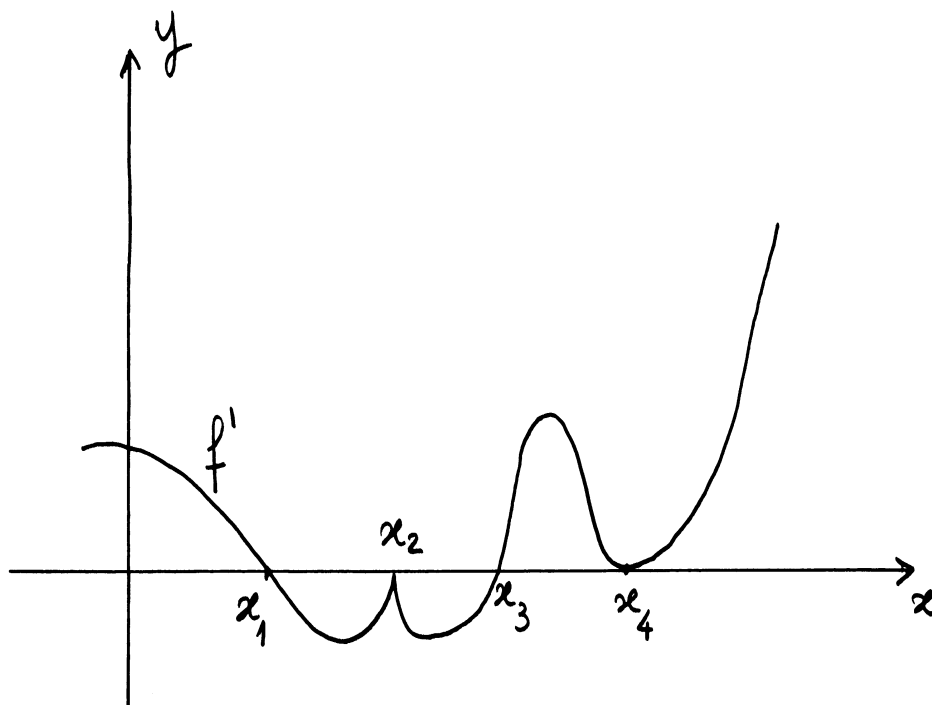
$$F(x) := \int_3^x f(t) dt,$$

sabiendo que la gráfica de f es



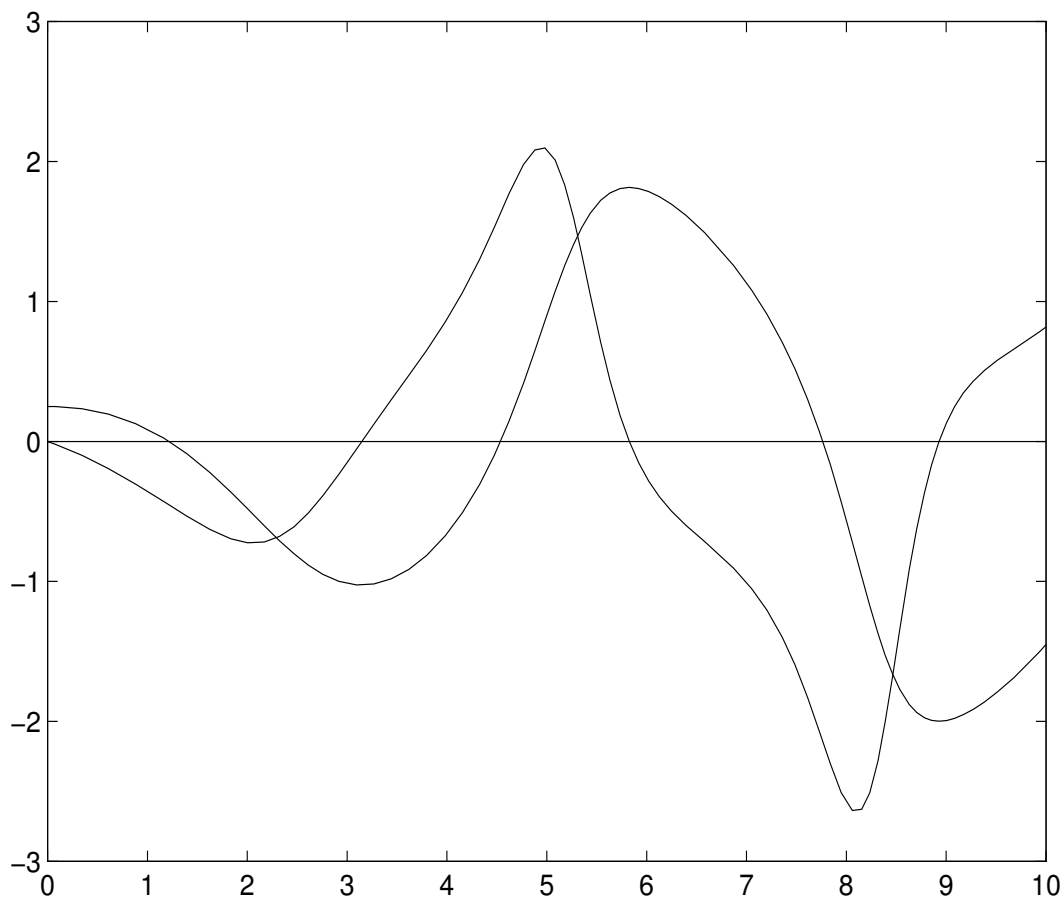
Ejercicio 7.

La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de f . Hállense todos los puntos máximos y mínimos locales de f . Después dígase todo lo que se pueda de f .



Ejercicio 8.

En la figura que sigue se muestran las gráficas de una función $f(x)$ y de su función derivada $f'(x)$ en el intervalo $[0,10]$. ¿Qué curva corresponde a $f(x)$ y cuál a $f'(x)$? Díganse todas las razones que se puedan.

**Ejercicio 9.**

Dada la función

$$f(x) := \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

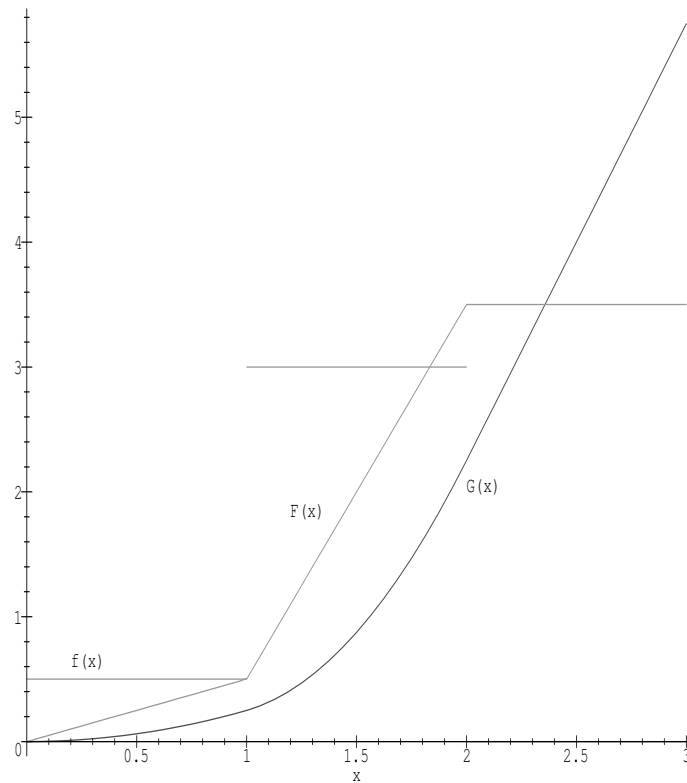
- Hállese la función $F(x) := \int_0^x f(t) dt$, $0 \leq x \leq 3$.
- Véase que $F(x)$ es continua en $x = 1$.
- Hállese la función $G(x) := \int_0^x F(t) dt$, $0 \leq x \leq 3$.
- Demuéstrese que $G(x)$ es derivable en $x = 1$ y en $x = 2$.

- Dibújense las gráficas de las funciones $f(x)$, $F(x)$ y $G(x)$.

Soluciones parciales.- La función $G(x)$ viene dada por las fórmulas

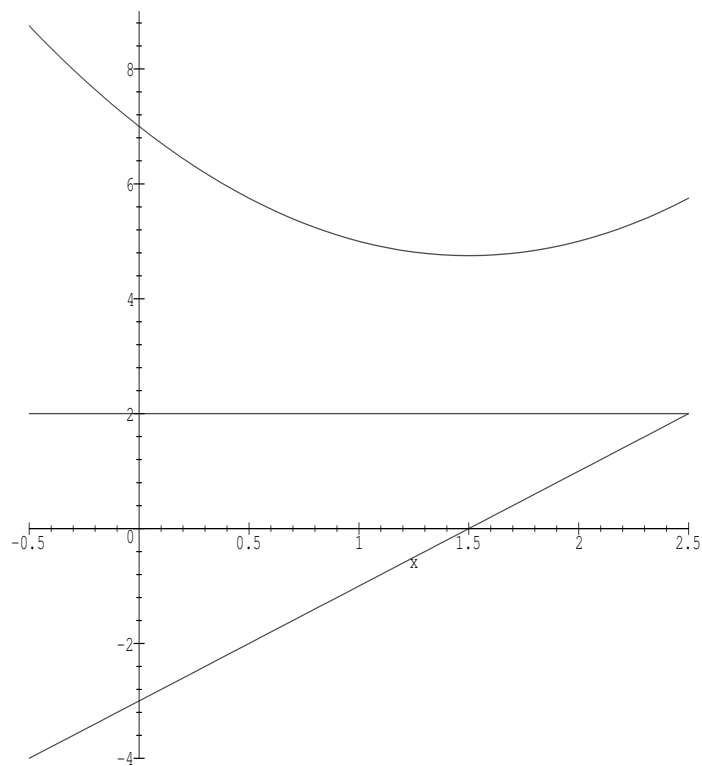
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ \frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{5}{4} & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ \frac{7}{2}x - \frac{19}{4} & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Las gráficas de $f(x)$, $F(x)$ y $G(x)$ son:



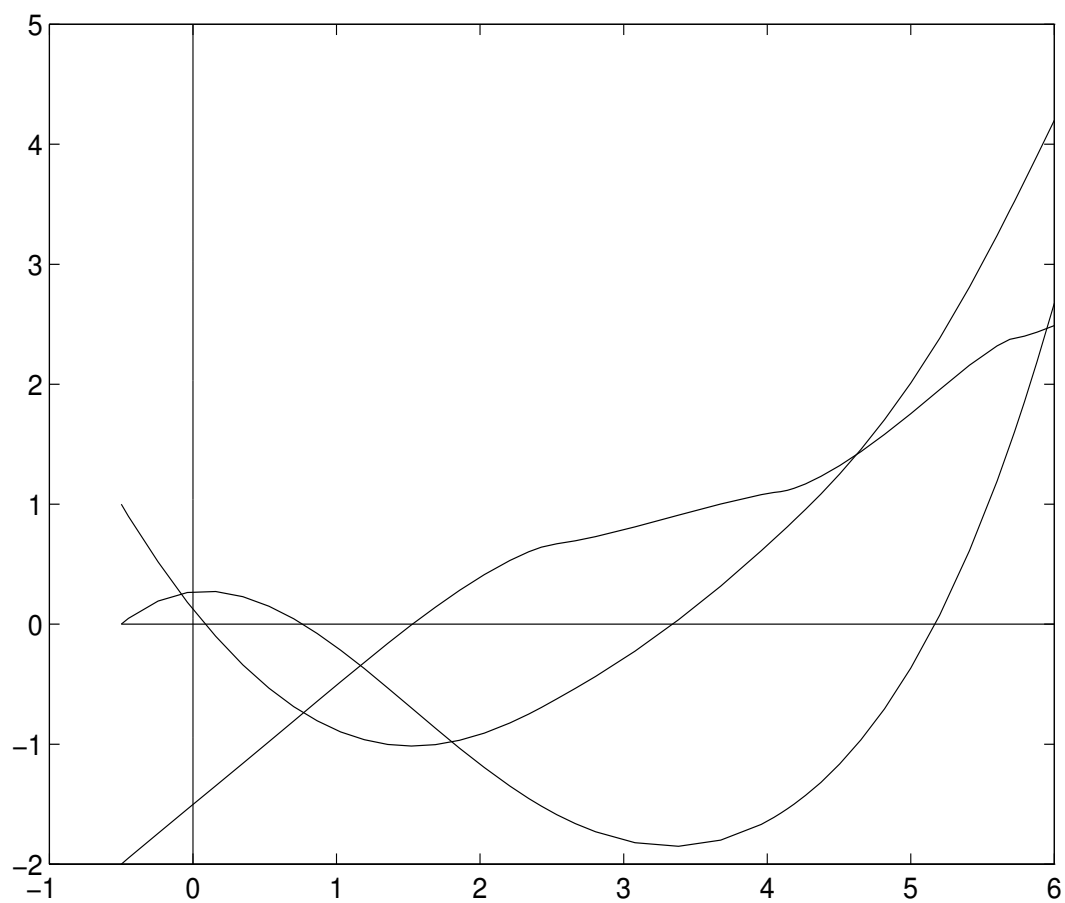
Ejercicio 10.

En la figura siguiente se muestran las gráficas de una función $f : [-0,5, 2,5] \rightarrow \mathbb{R}$ y de sus derivadas f' y f'' . ¿Cuál es la curva correspondiente a f ? ¿Cuál a f' ? ¿Cuál a f'' ? ¿Por qué?



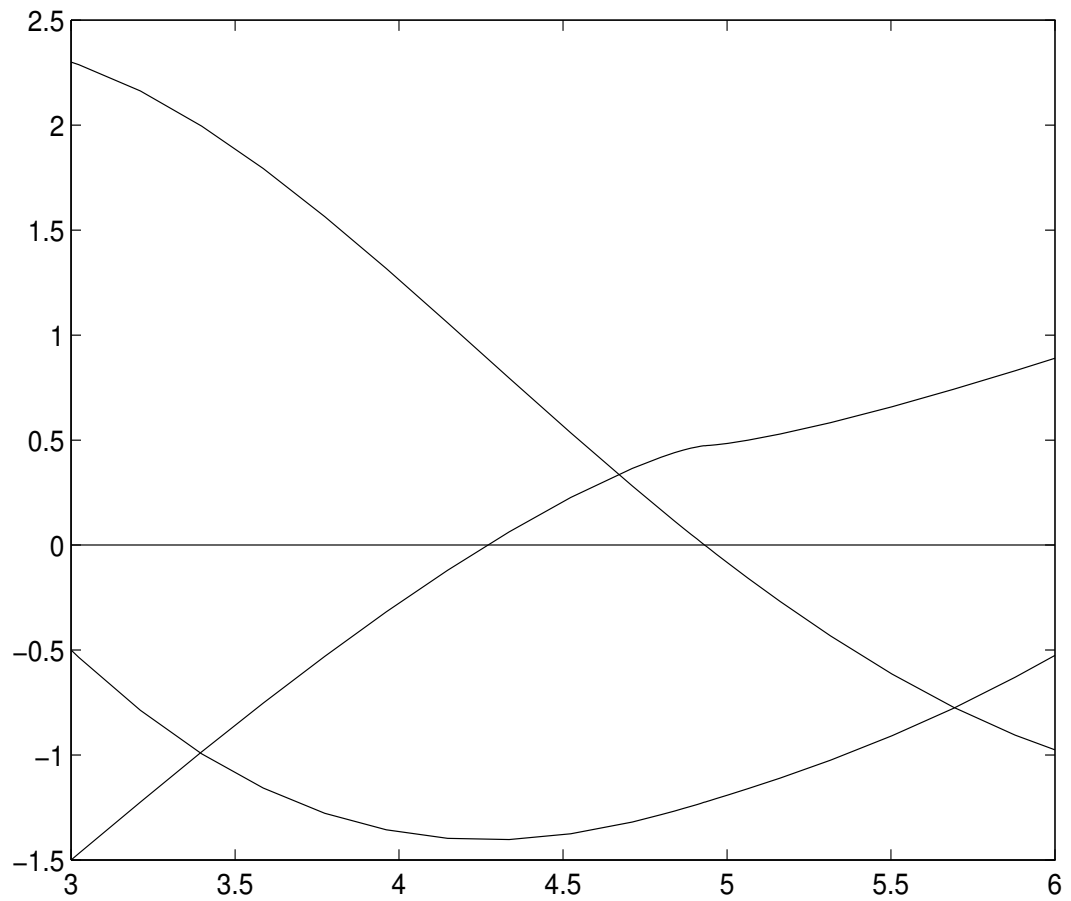
Ejercicio 11.

En la figura que sigue se muestran las gráficas de una función $f : [-0,5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ y de sus derivadas f' , f'' . ¿Cuáles son las curvas correspondientes a f , f' y f'' ? ¿Por qué?



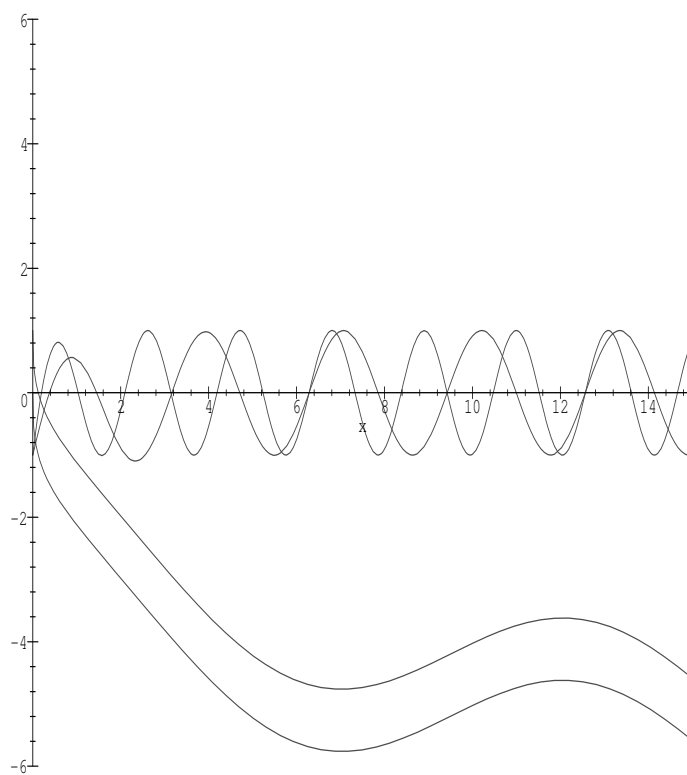
Ejercicio 12.

Las mismas cuestiones que en el ejercicio 10 para una función $f : [3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ y sus derivadas f' y f'' .



Ejercicio 13.

En la figura que sigue se muestran las gráficas de cuatro funciones de las que dos tienen la misma función derivada. ¿Cuáles son? ¿por qué?



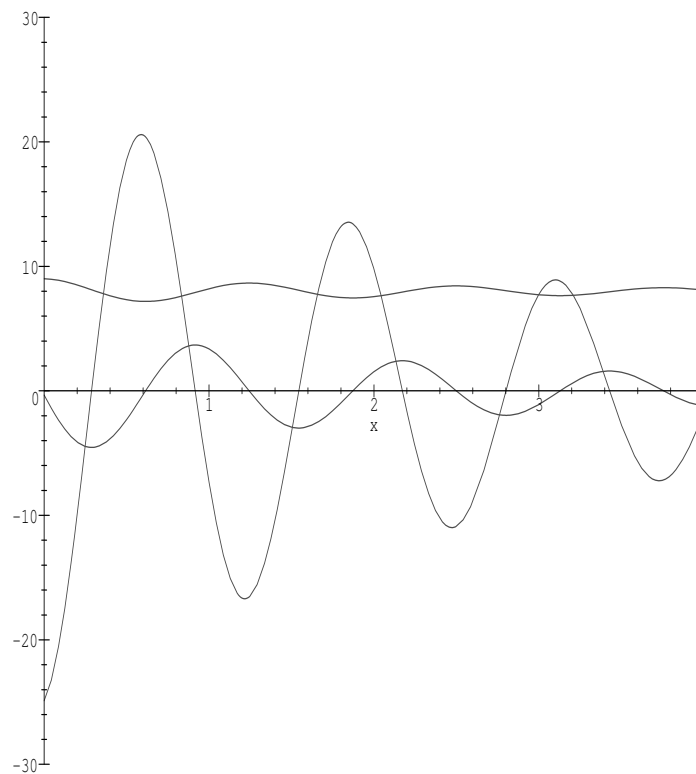
Ejercicio 14.

En la figura que sigue se han señalado las gráficas de $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, f' y f'' .

1) Explíquense todos los detalles que se puedan de f (f' y f''): intervalos de crecimiento, de concavidad, de convexidad, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión, etc.

2) La función f es más *suave* que f' ; i.e. la función f oscila menos que f' , y f' menos que f'' . ¿Es un hecho general?.

Nota.- Déense respuestas significativas.



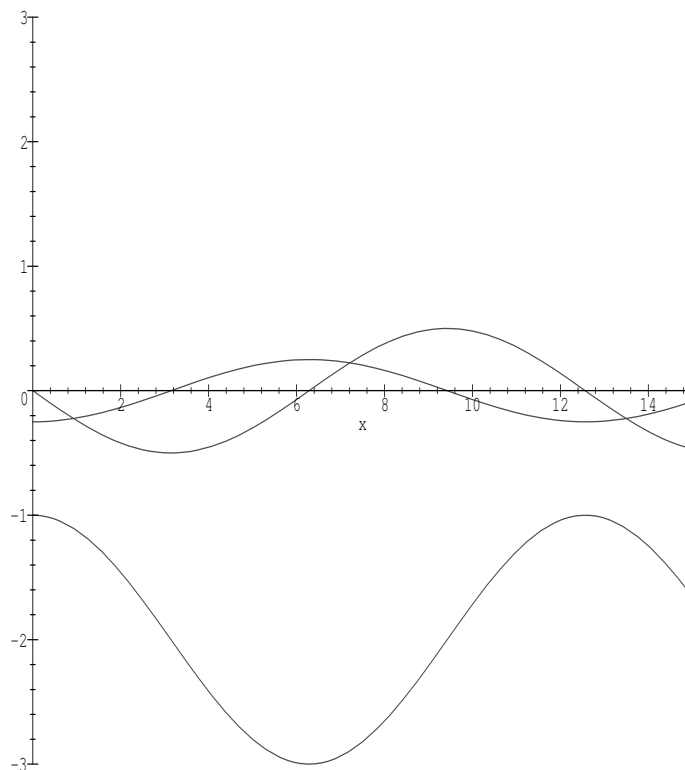
Ejercicio 15.

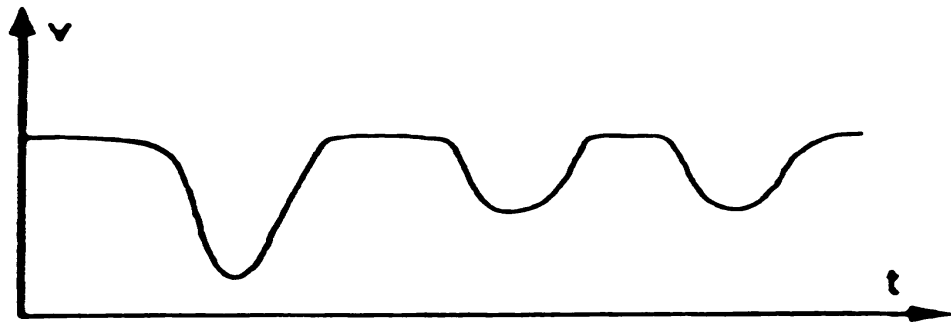
En la figura que sigue se han señalado las gráficas de $f : [0, 15] \rightarrow \mathbb{R}$, f' y f'' .

1) Explíquense todos los detalles que se puedan de f (f' y f''): intervalos de crecimiento, de concavidad, de convexidad, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión, etc.

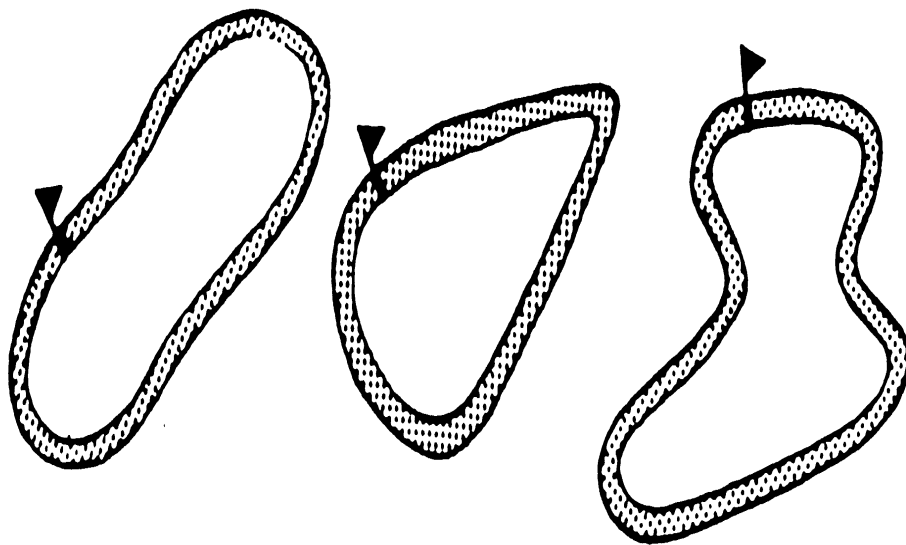
2) ¿Oscila menos la función f que f' ? ¿y f' menos que f'' ?

Nota.- Déense respuestas significativas.



Ejercicio 16.

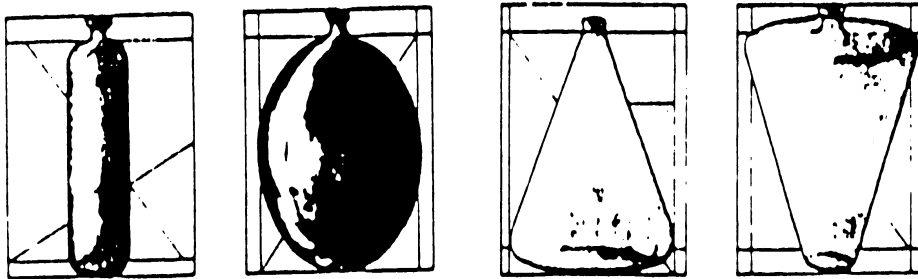
La gráfica anterior representa la velocidad de un coche en cada instante al dar la segunda vuelta a un circuito de carreras llano. En tu opinión, ¿cuál de los siguientes circuitos se corresponde con ella?



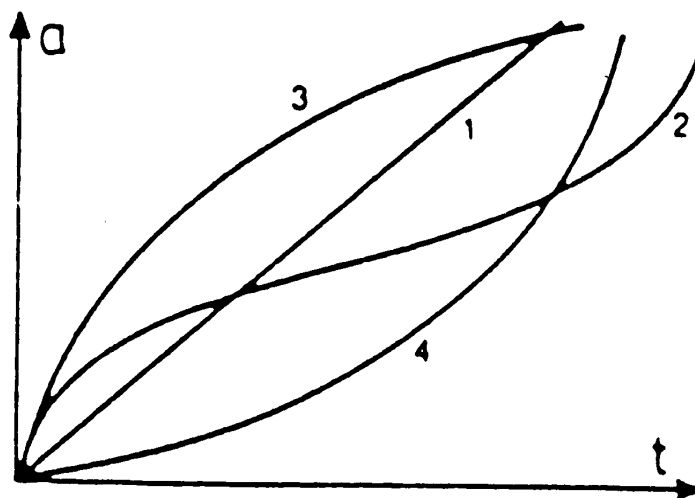
Ejercicio 17.

La noción de relación entre dos variables se expresa en matemáticas a través de las funciones y de sus representaciones gráficas.

A continuación presentamos distintos recipientes que queremos llenar con un caudal constante de agua.



En unos ejes cartesianos representamos el tiempo transcurrido (en el eje horizontal) y la altura del nivel de agua (en el eje vertical). Conseguimos así una gráfica que representa cómo varía el nivel del agua en el recipiente en función del tiempo transcurrido.



Si has entendido lo anterior, ¿serás capaz de indicar cuál es la curva de llenado que corresponde a cada uno de los recipientes? Dicho de otra forma, asocia cada recipiente con la curva de llenado que le corresponde.

Ejercicio 18.

Hállese $F'(x)$, siendo $F(x) := \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt$.

Ejercicio 19.

Hállese $F'(x)$, siendo $F(x) := \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{\frac{7-t^3}{t^2+2t+10}} dt$.

Ejercicio 20.

Encuéntrese alguna función $g(x)$ que satisfaga para todo x real:

$$g(x) = \int_0^x g(t) dt + 1.$$

Ejercicio 21.

¿Se pueden encontrar dos funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tales que para todo x real:

$$\begin{cases} g_1(x) = \int_0^x g_2(t) dt + 1, \\ g_2(x) = \int_0^x g_1(t) dt - 2 \quad ? \end{cases}$$