

Cálculo y Álgebra
1º de Ciencias Ambientales
Grupo 16
Fascículo 2º

Profesor Juan-Miguel Gracia

28 de octubre de 2002

Índice

1. Principio de inercia	2
2. Puntos de discontinuidad	2
3. Derivabilidad y continuidad	4
4. Fórmula de Taylor	7
5. Significado	7
6. Demostración	9
7. Ejercicios	11

1. Principio de inercia para funciones continuas

Si una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces el valor $f(x)$ conserva el mismo signo que $f(x_0)$ cuando x varía en un pequeño entorno de x_0 (Principio de inercia: El **signo** tiende a quedarse como está.) Expresada esta idea de manera más formal, queda como sigue.

Teorema 1 (Inercia) Sea $f(x)$ una función continua en x_0 y supongamos que $f(x_0) > 0$. Entonces existe un $r > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap \{\text{dominio de } f\}$ se tiene que $f(x) > 0$.

Si $f(x_0) < 0$, se obtiene un resultado análogo: $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap \{\text{dominio de } f\}$ se tiene que $f(x) < 0$. La demostración se deja como ejercicio.

2. Puntos de discontinuidad

Sea $f(x)$ una función real de una variable real x .

Definición.- Dado un punto a , se dice que $f(x)$ es continua en a si la función $f(x)$ está definida en a , existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

y vale $f(a)$. Es decir, si existe $f(a)$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definición.- Si x_0 es un punto del dominio de definición de la función $f(x)$ en el que $f(x)$ no es continua, decimos que $f(x)$ es *discontinua* en x_0 , o que $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad en x_0 . Si $f(x)$ está definida en un intervalo, es costumbre dividir sus puntos de discontinuidad en dos tipos. Antes de dar esta clasificación, tenemos que definir los *límites* por la izquierda y por la derecha en x_0 , que denotamos por

$$f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

respectivamente.

Definición.- Se dice que existe el límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 , y que vale ℓ_1 si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

siempre que x satisfaga: $|x - x_0| < \delta$, $x < x_0$ y x esté en el dominio de $f(x)$. Lo que denotamos por

$$f(x_0^-) = \ell_1.$$

Análogamente, se dice que existe el límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 , y que vale ℓ_2 si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

siempre que x satisfaga: $|x - x_0| < \delta$, $x_0 < x$ y x esté en el dominio de $f(x)$. Lo que denotamos por

$$f(x_0^+) = \ell_2.$$

Es fácil demostrar que en cualquier punto interior x_0 del dominio de $f(x)$, el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe si y solo si existen los límites laterales y son iguales

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

En cuyo caso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Definición.- Si x_0 es un punto de discontinuidad de $f(x)$, y si existen $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, se dice que $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad de *primera especie* o *clase*, en x_0 . También se suele decir que x_0 es una discontinuidad *simple* de $f(x)$.

Si al menos uno de los dos límites laterales no existe, se dice que $f(x)$ tiene un punto discontinuidad de *segunda especie* o *clase* en x_0 .

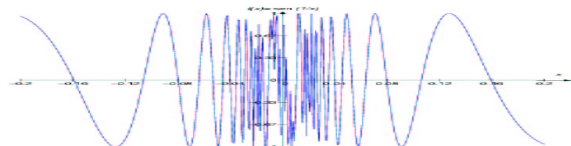


Figura 1: Discontinuidad de segunda especie en $x_0 = 0$, para $\sin(1/x)$.

Hay dos maneras en las cuales una función puede tener una discontinuidad simple: o bien $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ (en cuyo caso el valor de $f(x_0)$ no importa), o $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$. Una discontinuidad x_0 se llama *evitable* si es simple y $f(x_0^-) = f(x_0^+)$; en este caso, la función $f(x)$ se hace continua en x_0 si volvemos a definirla en x_0 así

$$f(x_0) := f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

3. Derivabilidad y continuidad

Sea $f(x)$ una función real de una variable real x . Sea x_0 un punto interior de su dominio de definición.

Definición.- Se dice que $f(x)$ es *derivable* (o *diferenciable*) en el punto x_0 si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0). \quad (1)$$

Así pues, la derivada de $f(x)$ en x_0 es el número $f'(x_0)$. La *diferencial* de $y = f(x)$ en x_0 es el producto $f'(x_0) dx$; se suele denotar por

$$dy = f'(x_0) dx. \quad (2)$$

En consecuencia, la diferencial dy es igual al productos de dos números: el número $f'(x_0)$ y el número dx . Es costumbre llamar *diferencial de x* al número dx y pensar que es un número muy “pequeño”. En puridad, la diferencial de $y = f(x)$ en x_0 es una función $\varphi(dx) := f'(x_0) dx$ de la variable independiente dx . Se podría utilizar cualquier letra o combinación de letras para llamar a dx ; por ejemplo, h . En este caso, la diferencial de $f(x)$ en x_0 sería la función $\varphi(h) := f'(x_0)h$; o $dy := f'(x_0)h$. No obstante, hay buenas razones para mantener la notación clásica de las diferenciales (debida a Leibniz); una de ellas, es que de (2) puede deducirse que $f'(x_0)$ es igual al cociente $\frac{dy}{dx}$, de los números dy y dx . Por consiguiente, la notación

$$\frac{dy}{dx},$$

denota a la vez dos cosas: el cociente antedicho y la derivada de y respecto de x en x_0 .

Teorema 2 Sea $f(x)$ una función derivable en x_0 . Entonces $f(x)$ es continua en x_0 .

DEMOSTRACIÓN. Hay que demostrar que el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existe y es igual a $f(x_0)$. Esto es equivalente a demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0);$$

que, a su vez, equivale a probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot h \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} h \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

□

El recíproco de este teorema es falso. Por ejemplo, la función $f(x) := |x|$ es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en este punto. Véase la Figura 2.

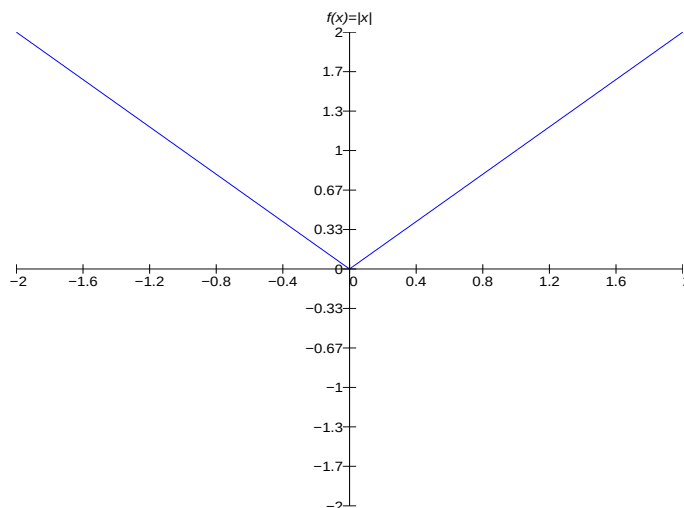


Figura 2: $y = |x|$ es continua pero no derivable en 0.

La no derivabilidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 es evidente cuando la gráfica de $f(x)$ presenta un punto anguloso en x_0 . Claro que hay formas peores de no ser derivable una función en un punto; como que no existan rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ por la izquierda o por la derecha en x_0 . Un ejemplo de esta última situación es el de la función

$$f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pues se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en 0; pero

$$f'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \operatorname{sen}(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(1/h);$$

este límite no existe; por consiguiente, $f(x)$ no es derivable en 0. Esto puede adivinarse al ver la Figura 3, ya que la recta tangente a la curva $y = x \operatorname{sen}(1/x)$ zigzaguea bruscamente cuando x tiende a 0.

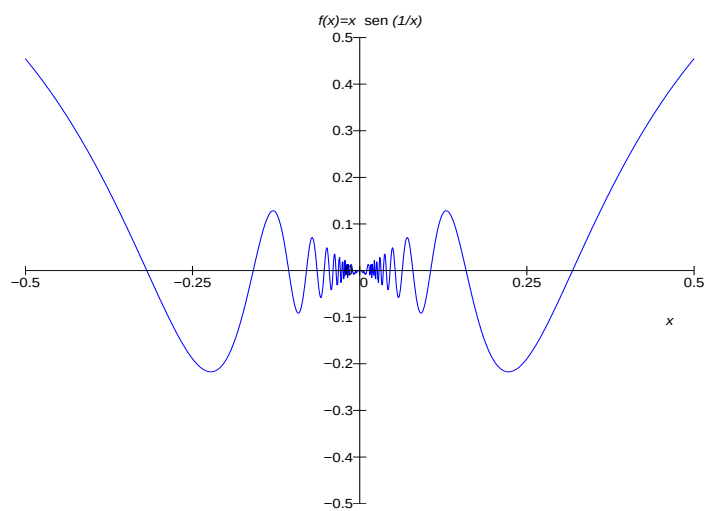


Figura 3: $x \operatorname{sen}(1/x)$ es continua pero no derivable en 0.

4. Fórmula de Taylor

Teorema 3 (Taylor) Sean f una función real en $[a, b]$, n un entero positivo, tales que existe $f^{(n)}(t)$ para todo $t \in (a, b)$, y supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos un punto $x_0 \in [a, b]$.

Entonces para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto c_x interior al intervalo que une x_0 con x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (3)$$

5. Significado

Comencemos dando las notaciones $0! := 1$, $f^{(0)} := f$, $a^0 := 1$. La fórmula (3) escrita más desarrollada queda como sigue.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - x_0)^n; \quad (4)$$

es decir, que $f(x)$ es la suma del polinomio $P(x)$ de grado $\leq n-1$,

$$P(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \quad (5)$$

y de un “Resto”. Este resto es el último término de (4), y vale

$$R(n, x_0, c_x) := \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (6)$$

Así pues,

$$f(x) = P(x) + R(n, x_0, c_x).$$

Si el resto es “pequeño”, se tiene que

$$f(x) \approx P(x).$$

Los coeficientes del polinomio $P(x)$ dependen de f y x_0 . A este polinomio se le conoce como el *polinomio de Taylor de f de grado $n-1$ en x_0* .

¿Qué factores contribuyen a que el Resto

$$\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - x_0)^n$$

sea “pequeño”?

$n!$	$1/n!$
$1!=1$	$1/1!=1$
$2!=2$	$1/2!=0,5$
$3!=6$	$1/3!=0,1666\dots$
$4!=24$	$1/4!=0,04166\dots$
$5!=120$	$1/5!=0,00833\dots$
$6!=720$	$1/6!=0,001388\dots$
$7!=5040$	$1/7!=0,000198\dots$
$8!=40320$	$1/8!=0,0000248\dots$
$9!=362880$	$1/9!=0,00000275\dots$
$10!=3628800$	$1/10!=0,000000275\dots$
$11!=39916800$	$1/11!=0,000000025\dots$

Cuadro 1: Factoriales del 1 al 11 y sus inversos.

En primer lugar, se tiene que $n!$ crece muy deprisa al crecer n . Observe-mos el Cuadro 1.

[Si] x está “próximo” a x_0 , el valor de $x - x_0$ es “pequeño”, $(x - x_0)^2$ es más “pequeño”, $\dots$, $(x - x_0)^n$ es *mucho más* “pequeño”. **Ejemplo.-** Si $x - x_0 = 0,02$, entonces se sigue que

$$(x - x_0)^2 = 0,0004.$$

$$(x - x_0)^3 = 0,000008.$$

$$(x - x_0)^4 = 0,0000016.$$

$$(x - x_0)^5 = 0,000000032.$$

Y, ¿qué pasa con el factor $f^{(n)}(c_x)$? Muchas veces no sabemos exactamente cuál es el número c_x ; el Teorema 3 sólo nos permite asegurar la existencia de este número; sabemos que el punto c_x está situado entre x_0 y x . Véase la Figura 4.

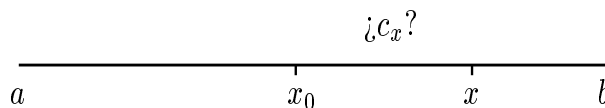


Figura 4: No se conoce c_x .

[Si] $f^{(n)}$ está acotada en (a, b) ; es decir, si existe un número real $M > 0$ tal que para todo $t \in (a, b)$,

$$|f^{(n)}(t)| \leq M;$$

entonces se sigue que

$$|\text{Resto}| = \left| \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

Por lo tanto, para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} |x - x_0|^n.$$

El segundo miembro de esta desigualdad puede hacerse menor que cualquier “pequeño” $\varepsilon > 0$, si elegimos x suficientemente “cerca” de x_0 . *¡Reaparece el único concepto del Cálculo Infinitesimal!*

6. Demostración

OBSERVACIÓN. Para $n = 1$, la fórmula (3) se reduce a

$$f(x) = f^{(0)}(x_0) + \frac{f^{(1)}(c_x)}{1!} (x - x_0),$$

ó

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_x)(x - x_0);$$

que es simplemente el teorema del valor medio.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos

$$P(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k. \quad (7)$$

Supongamos x fijo. Definamos el número A

$$A := \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n}; \quad (8)$$

es evidente que A depende de x .

Entonces

$$f(x) = P(x) + A(x - x_0)^n. \quad (9)$$

Tenemos que demostrar que existe algún c_x entre x_0 y x tal que

$$A = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}, \text{ lo que equivale a } f^{(n)}(c_x) = n!A.$$

Sea

$$g(t) := f(t) - P(t) - A(t - x_0)^n, \quad (a \leq t \leq b). \quad (10)$$

Por (7) y (10), para todo $t \in (a, b)$,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f'(t) - P'(t) - nA(t - x_0)^{n-1}, \\
g''(t) &= f''(t) - P''(t) - n(n-1)A(t - x_0)^{n-2}, \\
&\vdots \\
g^{(n-1)}(t) &= f^{(n-1)}(t) - P^{(n-1)}(t) - n(n-1) \cdots 2 \cdot A(t - x_0), \\
g^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) - P^{(n)}(t) - n!A.
\end{aligned} \tag{11}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
P(t) &= f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(t - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(t - x_0)^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!}(t - x_0)^{n-2} + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(t - x_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
P'(t) &= f'(x_0) + f''(x_0)(t - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(t - x_0)^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-3)!}(t - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(t - x_0)^{n-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P''(t) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(t - x_0) + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-4)!}(t - x_0)^{n-4} + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(t - x_0)^{n-3},
\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
P^{(n-1)}(t) &= f^{(n-1)}(x_0), \\
P^{(n)}(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

De (11) y (12) deducimos que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!A.$$

Por tanto, la demostración estará completa si podemos probar que existe algún c_x entre x_0 y x tal que

$$g^{(n)}(c_x) = 0.$$

Es obvio que

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0), \\ P'(x_0) &= f'(x_0), \\ P''(x_0) &= f''(x_0), \\ &\vdots \\ P^{(n-1)}(x_0) &= f^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} g(x_0) &= 0, \\ g'(x_0) &= 0, \\ g''(x_0) &= 0, \\ &\vdots \\ g^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Por (8) y (10), $g(x) = 0$.

En virtud del Teorema de Rolle aplicado a g con $g(x_0) = 0, g(x) = 0$, existe un x_1 entre x_0 y x tal que $g'(x_1) = 0$. Como $g'(x_0) = 0$, existe un x_2 entre x_0 y x_1 tal que $g''(x_2) = 0$. Después de n pasos, llegamos a la conclusión de que

$$g^{(n)}(x_n) = 0$$

para algún x_n entre x_0 y x_{n-1} ; esto es, entre x_0 y x . Este x_n es el c_x buscado.

□

7. Ejercicios

Ejercicio 1.- Escribase la fórmula de Taylor en la forma

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^n, \end{aligned}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$. Justifíquese. Asimismo, dense razones para la fórmula de MacLaurin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \end{aligned}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$.

Ejercicio 2.- Hállense los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para las funciones siguientes.

1. $f(x) = e^{\sin x}$; grado 3, en 0.
2. $f(x) = \sin x$; grado 5, en 0.
3. $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 0.
4. $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 1.

Ejercicio 3.- Escribanse cada uno de los polinomios siguientes como polinomios en $(x - 3)$.

1. $x^2 - 4x - 9$.
2. $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.
3. x^5 .
4. $ax^2 + bx + c$.

Ejercicio 4.- El polinomio de Taylor de grado 7 de la función $\sin x$ en $x = 0$, viene dado por

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Justifíquese. Entonces para todo $x \in [0, 2\pi]$ se tiene que

$$\sin x \approx P(x)$$

(el símbolo $\approx$ de lee “es aproximadamente igual a”). Es decir, la cantidad

$$|\sin x - P(x)|$$

es “pequeña”. Hállese un número M , lo más pequeño posible, tal que para todo $x \in [0, 2\pi]$,

$$|\sin x - P(x)| < M.$$

Ejercicio 5.- Estudio local de una función. Si $f^{(n)}(x)$ es continua en x_0 ,

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, la fórmula de Taylor permite escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (13)$$

con c_x en el intervalo abierto que une x_0 con x . Por el principio de inercia para funciones continuas, se tiene que $f^{(n)}(c_x)$ tiene el **mismo signo** que $f^{(n)}(x_0)$ si x se elige **lo suficientemente cerca** de x_0 .

Demuéstrese que

1. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en x_0 .
2. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en x_0 .
3. Si n es impar, entonces $f(x)$ no tiene ni máximo ni mínimo local en x_0 , (punto de inflexión).

Más generalmente, supongamos que $f'(x_0) \neq 0$,

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

y que la función $f^{(n)}(x)$ es continua en x_0 . Demuéstrese que si n es **impar** hay un punto de inflexión en x_0 , y si n es **par** no hay punto de inflexión.

Ejercicio 6.- Estudiar las gráficas de las funciones

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 + x - 2}{x^2}, \text{ en el entorno de } x = 4, \\ y &= x^3 - 3x^2 + 3x + 1, \text{ en el entorno de } x = 1, \\ y &= x^3 - 3x + 2, \text{ en el entorno de } x = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.- Supóngase que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en x_0 de f y g , respectivamente. En otras palabras,

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \quad \text{y} \quad b_i = \frac{g^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

Hállense los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en x_0 de las funciones siguientes, en términos de los a_i y b_i .

1. $f + g$.
2. fg .
3. f' .
4. $h(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$.
5. $k(x) := \int_0^x f(t) dt$.

Ejercicio 8.- Sea $f(x)$ una función real definida en el intervalo $[-5, 5]$ de la que conocemos las dos tablas de valores dadas a continuación. Es sabido que $f(x)$ admite derivadas de cualquier orden. Decir todo lo que se pueda de $f(x)$ y de su gráfica $y = f(x)$.

En particular, se pide hallar **aproximadamente**:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- La integral $\int_0^1 f(x) dx$.

- Las derivadas $f'(2,3), f''(2,3)$.
- La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) , con $x_0 = 2,3, y_0 = 3,6373$.
- Los intervalos de concavidad y convexidad.

x	$f(x)$
-5	5,3794
-4,9	5,4600
-4,8	5,5455
-4,7	5,6331
-4,6	5,7194
-4,5	5,8006
-4,4	5,8728
-4,3	5,9317
-4,2	5,9736
-4,1	5,9949
-4	5,9929
-3,9	5,9655
-3,8	5,9119
-3,7	5,8322
-3,6	5,7275
-3,5	5,5999
-3,4	5,4524
-3,3	5,2886
-3,2	5,1123
-3,1	4,9276
-3	4,7383
-2,9	4,5482
-2,8	4,3604
-2,7	4,1775
-2,6	4,0017
-2,5	3,8346
-2,4	3,6771
-2,3	3,5299
-2,2	3,3930
-2,1	3,2665
-2	3,1498
-1,9	3,0426
-1,8	2,9443
-1,7	2,8541
-1,6	2,7714
-1,5	2,6955
-1,4	2,6260
-1,3	2,5621
-1,2	2,5035
-1,1	2,4498
-1	2,4005
-0,9	2,3556
-0,8	2,3147
-0,7	2,2779
-0,6	2,2450
-0,5	2,2161
-0,4	2,1913
-0,3	2,1709
-0,2	2,1550
-0,1	2,1441

x	$f(x)$
0	2,1386
0,1	2,1388
0,2	2,1455
0,3	2,1592
0,4	2,1804
0,5	2,2100
0,6	2,2485
0,7	2,2964
0,8	2,3542
0,9	2,4221
1	2,5002
1,1	2,5880
1,2	2,6848
1,3	2,7893
1,4	2,8997
1,5	3,0137
1,6	3,1283
1,7	3,2402
1,8	3,3455
1,9	3,4401
2	3,5202
2,1	3,5819
2,2	3,6218
2,3	3,6373
2,4	3,6266
2,5	3,5890
2,6	3,5247
2,7	3,4353
2,8	3,3228
2,9	3,1905
3	3,0420
3,1	2,8812
3,2	2,7121
3,3	2,5388
3,4	2,3647
3,5	2,1929
3,6	2,0262
3,7	1,8664
3,8	1,7151
3,9	1,5732
4	1,4412
4,1	1,3193
4,2	1,2073
4,3	1,1049
4,4	1,0115
4,5	0,9265
4,6	0,8493
4,7	0,7792
4,8	0,7155
4,9	0,6578