Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una ecuación diferencial es una ecuación cuya incógnita es una *función* que aparece junto con su(s) derivada(s) y funciones conocidas. Si la incógnita es una función real de una variable real, la ecuación diferencial se llama *ordinaria*. Cuando la incógnita es una función real de dos o más variables reales la ecuación diferencial se llama *en derivadas parciales*. Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias lo son:

$$x' = t^2 x + \cos t; \qquad \frac{dx}{dt} = e^t x^2 + \operatorname{sen}(x^2);$$

$$y' = 3xy + x^4; \qquad \frac{dy}{dx} = 3xy + x^4; \qquad dy - (3xy + x^4)dx = 0;$$

$$x'' + (x')^3 - (3t^2 + 7)x = 0;$$

$$(2x^2 + xy^2 + \cos xy)dx + (6x^3y^2 - 2)dy = 0.$$

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2)u;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Resolver una ecuación diferencial es buscar funciones que la satisfagan para todos los valores posibles de las variables independientes. Por ejemplo, una solución de la ecuación $x' = t^2 x + \cos t$ es una función derivable $v(t)$ tal que para todo valor real de t donde esté definida $v(t)$ se verifique que

$$v'(t) = t^2 v(t) + \cos t.$$

Si $u(x, y)$ es una función real de las variables reales x, y, la derivada parcial $\partial u/\partial x$ se obtiene derivando $u(x, y)$ respecto de x, como si y fuera una constante o un parámetro. Por ejemplo, si $u(x, y) := 3x^2y^4 + \operatorname{sen}(xy)$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^4 + y\cos(xy).$$

La derivada $\partial u/\partial y$ se obtiene de manera análoga:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y^3 + x\cos(xy).$$

En general no se puede resolver una ecuación diferencial de manera exacta mediante soluciones que sean funciones *elementales*. Pero, en muchas ocasiones, sólo importa conocer algunas propiedades o comportamientos de la función solución en la que estemos interesados. Por ejemplo, podría interesarnos saber si la solución $v(t)$ de la ecuación diferencial $x'' + (x')^3 - (3t^2 + 7)x = 0$ que verifica las condiciones iniciales $x(1) = 2, x'(1) = 4$ tiene límite cuando $t \to \infty$. Caso de existir este límite, quizás querríamos hallar su valor

$$\lim_{t\to\infty} v(t),$$

aun sin conocer $v(t)$ explícitamente. Y, si esto fuera difícil o imposible, saber si la afirmación

$$\lim_{t\to\infty} v(t) < 300$$

es cierta o no.

Muchas veces, se procede a resolver *numéricamente* la ecuación diferencial; lo que equivale a decir que se halla una *tabla de valores* de la función solución.

¿En qué parte de las Matemáticas están ubicadas las ecuaciones diferenciales?

Las ecuaciones diferenciales están dentro del Análisis Matemático o Cálculo Infinitesimal. El Cálculo Infinitesimal trata de las relaciones entre derivadas e integrales. Ya hemos visto en el bachillerato los límites, las derivadas y las integrales

$$\lim_{n\to\infty} a_n; \qquad \lim_{x\to x_0} f(x); \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}; \qquad \int f(x)\,dx; \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es posible estudiar bastantes aspectos de las ecuaciones diferenciales ordinarias después de estos conceptos.