Ecuación diferencial de variables separadas $y' = f(x)g(y)$

Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Juan-Miguel Gracia

Fórmula de sustitución o de cambio de variables:

Si f y g' son continuas, entonces mediante el cambio $u = g(x)$ se obtiene

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veáse el "Calculus" de M. Spivak para una demostración.

Regla de la cadena:

Definamos $(f \circ g)(x) := f\big(g(x)\big)$, entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Fórmula de sustitución o de cambio de variables:

Si f y g' son continuas, entonces mediante el cambio $u = g(x)$ se obtiene

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veáse el "Calculus" de M. Spivak para una demostración.

Regla de la cadena:

Definamos $(f\circ g)(x) := f\big(g(x)\big)$, entonces

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Derivada de la función inversa:
$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Con la notación de Leibniz,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Derivada de la función inversa:

$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Con la notación de Leibniz,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Teorema

Sea la ecuación diferencial

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

con $f(x)$ *continua para* $a < x < b$ *y* $g(y)$ *continua,* $g(y) \neq 0$*, para* $c < y < d$*. Sean* $F(x)$ *y* $G(y)$ *primitivas de* $f(x)$ *y* $1/g(y)$ *en* (a, b) *y* (c, d)*, respectivamente. Sea* C *un número para el que se satisfaga la ecuación*

$$G(y) = F(x) + C \tag{2}$$

para algún punto, al menos, $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$*.*
Sea $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$*. Si* (x_0, y_0) *satisface (2), entonces (2) define "y" implícitamente como una función* φ *de "x" en un cierto intervalo que contiene a* x_0*. Además,* φ *es una solución de (1),* $\varphi(x_0) = y_0$*, y es la única solución que cumple esta condición inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Como $G'(y) = 1/g(y)$, $G'(y)$ es continua y nunca se anula. Por lo que $G'(y)$ tiene siempre el mismo signo y, en consecuencia, $G(y)$ tiene una función inversa $G^{-1}(y)$. Nuestra tarea consiste ahora en probar que existe un intervalo de x para el que está definida

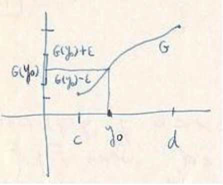
$$G^{-1}[F(x) + C].$$

Como (c, d) es un intervalo abierto y $G(y)$ es estrictamente creciente (o decreciente), el conjunto imagen de G es un intervalo abierto también. Por tanto, si $y_0 \in (c, d)$, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo

$$G(y_0) - \varepsilon < y < G(y_0) + \varepsilon$$

está contenido en la imagen de G y, por consiguiente, en el dominio de G^{-1}.

Demostración de la existencia



Como $F(x_0)+C = G(y_0)$, la continuidad de la función $F(x) + C$ implica la existencia de un $\delta > 0$ tal que si $|x-x_0| < \delta$, entonces

$$x \in (a, b), \quad |F(x) + C - G(y_0)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$G(y_0) - \varepsilon < F(x) + C < G(y_0) + \varepsilon;$$

es decir, $F(x) + C$ se halla en el dominio de G^{-1}. De este modo, la existencia de un intervalo apropiado de x

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

está probada.

Si x pertenece a este intervalo, aplicamos G^{-1} a ambos miembros de (2) y obtenemos la función

$$y = G^{-1}[F(x) + C].$$

Veamos, finalmente, la demostración de la unicidad. Supongamos que sea $\varphi_1(x)$ una función definida en un intervalo I_1 tal que $x_0 \in \mathring{I}_1$, (interior de I_1) con $I_1 \subset (a, b)$, que es solución de (1) y $\varphi_1(x_0) = y_0$. Se satisface entonces

$$\varphi_1'(x) = \frac{\mathrm{d}\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)g[\varphi_1(x)], \qquad x \in I_1; \tag{3}$$

luego,

$$\frac{\varphi_1'(x)}{g[\varphi_1(x)]} = f(x), \qquad x \in I_1,$$

de donde,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1'(t)}{g[\varphi_1(t)]}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

y de aquí haciendo el cambio de variable $y = \varphi_1(t)$ queda

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1'(t)}{g[\varphi_1(t)]}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_1(x)} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = (\text{por } (4)) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi;$$

lo que implica

$$\begin{gathered} G[\varphi_1(x)] - G[\varphi_1(x_0)] = F(x) - F(x_0), \quad x \in I_1 \\ G[\varphi_1(x)] = G(y_0) + F(x) - F(x_0) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \end{gathered}$$

Si $x \in I_1, |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\varphi_1(x) = G^{-1}[F(x) + C].$$

Si $\varphi_2(x)$ es una solución de (1) definida en un intervalo I_2, con $x_0 \in \mathring{I}_2, I_2 \subset (a, b)$ y tal que $\varphi_2(x_0) = y_0$, por un cálculo análogo al que hemos hecho para $\varphi_1(x)$ llegaríamos a que si $x \in I_2, |x - x_0| < \delta$ entonces

$$\varphi_2(x) = G^{-1}[F(x) + C].$$

Por lo tanto, si $x \in I_1 \cap I_2, |x - x_0| < \delta$, entonces $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$; luego $\varphi_1 = \varphi_2$ en un entorno de x_0.

$\square$