Modelos Matemáticos

Dado que las ecuaciones diferenciales aparecen de modo natural como mode-los matemáticos para analizar problemos del mundo físico, químico, biológico, etc. empezaremos dedicando unos párrafos a esta cuestión general y muy importante.

Hoy en día todo el mundo habla de modelos matemáticos. Aparecen por doquier. Lo curioso del caso es que siempre han estado presentes en todas las ciencias que emplean las matemáticas. Pero en los últimos veinticinco años se ha reconocido la necesidad de dedicarles una atención específica en la enseñanza, habiéndose impartido muchos cursos sobre *Modelación Matemática*.

Un examen de los orígenes de cualquier campo científico, ya sea astronomía, física o psicología, indica que la disciplina empezó con una enorme masa de observaciones y experimentos. Es natural, por tanto, que las primeras etapas al cuantificar el tema acarrean la recolección, la representación y el tratamiento de datos. En consecuencia, el estudio de la estadística ha jugado un papel importante en la preparación matemática de los estudiantes que trabajan en áreas cuantitativas de las ciencias biológicas o sociales. Un tratamiento de datos puede ser bastante elemental, suponiendo poco más que un listado, una clasificación y unos pocos cálculos directos. Puede ser también sofisticado, implicando ideas matemáticas sustanciales y problemas delicados de diseño de experimentos. Una vez que han sido recogidos suficientes datos y analizados adecuadamente, el investigador trata de imaginar un proceso que justifique estos resultados. Es esta actividad, la creación mental de un sistema con papel-y-lápiz, la que vamos a comentar. En la literatura científica, esta actividad es conocida comúnmente como la construcción y el análisis de una teoría. Nos referiremos a ella como la construcción, desarrollo y estudio de los modelos matemáticos.

El problema original surge casi siempre en el *mundo real*, algunas veces en las condiciones relativamente bajo control de un laboratorio y a veces en el medio ambiente, mucho menos comprendido. Por ejemplo, un psicólogo observa ciertos tipos de comportamiento en las ratas que corren por un laberinto, un especialista en genética anota los resultados de un experimento de hibridación, o un economista registra el volumen del comercio internacional bajo una política específica de aranceles, y luego cada uno conjetura ciertas razones que expliquen sus observaciones. Estas conjeturas pueden estar basadas completamente en la intuición, pero más a menudo son el resultado de un estudio detallado y del reconocimiento de algunas analogías con otras situaciones que se comprenden mejor. Este estudio minucioso del sistema, que precede a la formación de las conjeturas, es la primera etapa en la construcción del modelo. Mucho de este trabajo inicial debe ser hecho

por un investigador que esté familiarizado con el origen del problema y con la psicología, biología, economía, o lo que quiera que sea.

La siguiente etapa es un intento para plantear el problema de modo tan preciso como sea posible. Con esto se quiere decir llegar a una comprensión clara y definida de las palabras y de los conceptos utilizados. Este proceso supone hacer típicamente ciertas idealizaciones y aproximaciones. Un aspecto importante de esta etapa es el intento de identificar y seleccionar aquellos conceptos que se consideren básicos para el estudio. El propósito aquí es eliminar la información irrelevante y simplificar la que se vaya a retener tanto como sea posible. Por ejemplo, en relación con el psicólogo que estudia las ratas en un laberinto, el experimentador puede decidir que no tiene ninguna importancia que todas las ratas sean grises o que el laberinto tenga 17 compartimientos. Por otro lado, puede considerar significativo que todas las ratas sean hermanas o que una parte del laberinto esté más iluminada que otra. Nos referiremos a esta etapa de *idealización, aproximación e identificación* como la construcción de *un modelo real*. Esta terminología trata de reflejar el hecho de que el contexto es, todavía, el de los objetos reales (animales, aparatos, etc.), pero que la situación puede no ser realista. Volviendo al laberinto, se puede construir un modelo real, con ratas que cambian de compartimento, de modo que cada rata esté siempre en algún compartimento, nunca la mitad en uno y la otra mitad en otro. Pero según qué aspecto sea el que se investiga puede ser adecuado considerar que la rata cambia de compartimento de manera regular en el tiempo.

La tercera etapa está más indefinida y con frecuencia requiere un alto grado de creatividad. Uno mira el modelo real e intenta identificar el proceso ope-rativo que funciona. La meta consiste en la expresión de la situación entera en términos simbólicos. Así el modelo real llega a ser un *modelo matemático* en el que las cantidades y los procesos reales son reemplazados por símbolos y operaciones matemáticas. Habitualmente, mucha de la valía del estudio gira sobre esta etapa, porque una identificación inapropiada entre el mundo real y el mundo matemático es improbable que conduzca a resultados útiles. Debería ponerse mucho énfasis en que la construcción de un modelo matemático no es, de ninguna manera, única. Puede haber varios modelos matemáticos para la misma situación real. En tales circunstancias puede suceder que de uno de los modelos pueda demostrarse que es claramente mejor que cualquiera de los otros por medio de observaciones. De hecho, ocurre a menudo que un experimento muy elaborado se diseña con el propósito de mostrar que un modelo es mejor que otros. Naturalmente, si esto puede ser demostrado, entonces uno lo elige para usarlo como el modelo mejor. Sin embargo, puede acontecer también que cada uno de varios modelos resulte ser útil en el estudio —contribuyendo cada modelo a la comprensión de algunos aspectos de la situación (por ejemplo, esto

ocurre con las teorías ondulatoria y corpuscular de la luz), pero que ningún modelo explique adecuadamente todas las facetas del problema que se está considerando. De este modo puede no haber el modelo mejor, y el que será usado dependerá de las cuestiones precisas que vayan a ser estudiadas.

En esta etapa es necesario decidir qué variables son importantes y cuáles no lo son. Las primeras se clasifican luego en *variables independientes* y *variables dependientes*. Las variables no importantes son aquellas que tienen muy poco o ningún efecto en el proceso. (Por ejemplo: (1) en el estudio de un cuerpo que cae, su color es de muy poco interés; (2) en el estudio de una mezcla de agua y sal dentro de un depósito, poco importa si la temperatura del agua es de 17^o C o de 32^o C). Las variables independientes son aquellas cuyo efecto es significativo y que servirán como información de entrada para el modelo. Para el cuerpo que cae, su forma, masa, posición inicial, velocidad inicial y tiempo transcurrido desde el instante de lanzamiento son posibles variables independientes. Para la mezcla de agua y sal el tiempo que ha pasado desde que comenzó el bombeo de mezcla hacia/desde el depósito es una variable independiente; también lo son la velocidad de flujo entrante y saliente, la concentración de sal entrante, la capacidad del depósito. En la formulación matemática del modelo, algunas variables independientes se pueden denominar *parámetros*. Por otra parte, las variables dependientes o funciones son las que dependen de las independientes y que son importantes en la solución del problema. De nuevo para el cuerpo en caída, su velocidad, su posición y el instante de impacto son posibles variables dependientes. En las mezclas de agua y sal, la cantidad total de sal que hay en el depósito en cada momento es una variable dependiente.

En segundo lugar, se debe determinar o especificar las relaciones (p. ej., una ecuación diferencial) que existan entre las variables dependientes e independientes. Para traducir los problemas en términos matemáticos es muy importante indicar claramente las *unidades físicas* (metros, centímetros, kilogramos, gramos, segundos, minutos, amperios, voltios, etc.). Hay que hacer también un *análisis dimensional* de los dos miembros de cada ecuación; por ejemplo, no debiera suceder que en el miembro a la izquierda del signo = salieran kgs/sg y en el de la derecha salieran kgs/min. Muchos de estos problemas encajan en el siguiente esquema:

velocidad		velocidad		velocidad
instantánea	=	instantánea	−	instantánea
de cambio		de entrada		de salida

Este esquema puede ser sustituido por el siguiente planteamiento global en

un intervalo $[t, t+h]$ con h pequeño:

Incremento de la función incógnita durante $t \leq \tau \leq t+h$	$=$	Cantidad de sustancia que entra en $t \leq \tau \leq t+h$	$-$	Cantidad de sustancia que sale en $t \leq \tau \leq t+h$

A continuación, utilizando el teorema del valor medio para integrales llegamos al primer esquema y, de éste, a la ecuación diferencial. Estos problemas pueden resultar difíciles al principio, pero acaban entendiéndose. Debe recordarse en todo momento que estas ecuaciones diferenciales no se deducen de una mane-ra matemática (es decir, rigurosa) de otros resultados matemáticos, sino que son modelos matemáticos; y que por lo tanto su única justificación estriba en la concordancia posterior de las predicciones teóricas con los experimentos de laboratorio.

Un artículo con muy buenos consejos para plantear ecuaciones diferenciales de primer orden para resolver problemas enunciados sólo con palabras (sin fórmulas), es "Setting up first-order differential equations from word problems" por Beverly Henderson West que aparece en las páginas 3–27 del Chap. 1 del libro:

M. Braun, C.S. Coleman, D.A. Drew, edits.:*Differential Equations Models*, Springer-Verlag, 1983.

Otros libros interesantes a este respecto son:

O. Plaat: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Reverté, Barcelona, 1974.

M.R. Spiegel: *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Tercera edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1983.

Después de que el problema ha sido transformado en *términos simbólicos*, el sistema matemático resultante se estudia usando *ideas y técnicas matemáticas* apropiadas. Los resultados del estudio matemático son teoremas, desde un punto de vista matemático, y *predicciones*, desde un punto de vista empírico. La motivación para el estudio matemático no es producir nuevas matemáticas, es decir, nuevas ideas abstractas o nuevos teoremas, aunque esto puede ocurrir; sino, lo que es mucho más importante, producir nueva información sobre la situación que está siendo estudiada. En efecto, es probable que tal información pueda ser obtenida usando conceptos y técnicas matemáticos bien conocidos. La contribución importante del estudio puede ser el reconocimiento de la relación entre resultados matemáticos conocidos y la situación que está siendo estudiada.

La etapa final es la comparación de los resultados, predichos en base al trabajo matemático, con el mundo real. La situación más feliz es aquella en la que todo lo observado está explicado por las conclusiones del estudio matemático y en la que las predicciones son comprobadas subsiguientemente mediante experimentos. Una concordancia tal no se observa frecuentemente,

al menos no en el primer intento. Una situación mucho más típica sería aquella en que el conjunto de conclusiones de la teoría matemática contiene algo que parece estar de acuerdo y algo que parece estar en desacuerdo con los resultados de los experimentos. En tal caso, uno tiene que examinar todas las etapas del proceso de nuevo. ¿Ha habido alguna omisión significativa en la etapa que va del mundo real al modelo real? ¿Refleja el modelo matemático todos los aspectos importantes del modelo real, y evita introducir aspectos extraños no observados en el mundo real? ¿Está libre de errores el trabajo matemático? Habitualmente, el proceso de construcción de un modelo necesita varias iteraciones, siendo cada una un refinamiento de la precedente, hasta que se encuentra finalmente una aceptable.

Mediante un diagrama podemos representar este proceso en la figura 1.

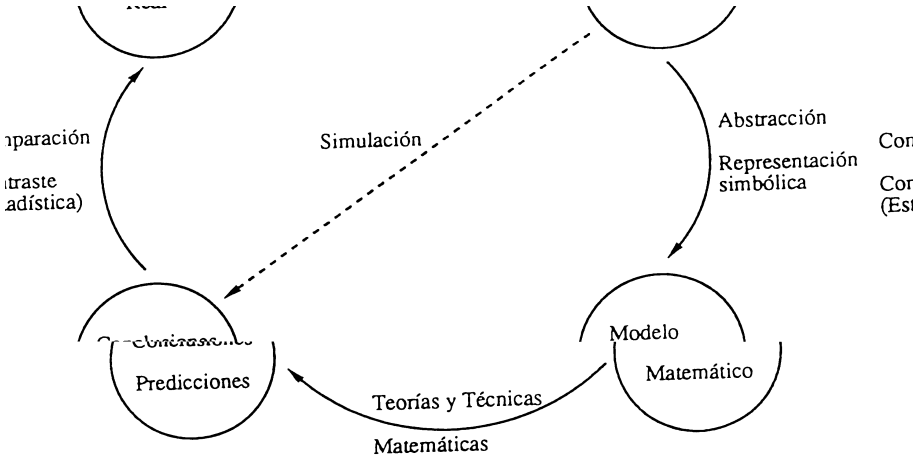

Figura 1