Extensión de la regla de la cadena

Funciones diferenciables.

$$z = f(x, y), \quad x = x(u, v, w), y = y(u, v, w)$$

$$z = f\Big(x(u, v, w), y(u, v, w)\Big) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial w}$$

$$z'_u(u_0, v_0, w_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0, w_0)$$

$$+f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0, w_0)$$

$$x_0 := x(u_0, v_0, w_0),\ y_0 := y(u_0, v_0, w_0).$$

Ejemplo 1

$x(u,v,w) := u+v-w^2, y(u,v,w) := uv^3w$, $z = f(x,y)$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$ en función de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \frac{\partial x}{\partial w} = -2w$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^3 w, \frac{\partial y}{\partial v} = 3uv^2 w, \frac{\partial y}{\partial w} = uv^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,v^3 w \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,3uv^2 w \\
\frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial x}\,2w + \frac{\partial f}{\partial y}\,uv^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 2 La temperatura en una placa delgada se representa por la función real f, siendo $f(x, y)$ la temperatura en (x, y). Introduciendo coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$, la temperatura se convierte en una función de r y θ determinada por la ecuación

$$\varphi(r, \theta) := f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Expresar $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ en términos de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= -r\frac{\partial f}{\partial x}\operatorname{sen}\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\end{aligned}$$

Problema.- Dadas las funciones $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ y $R(x,y,z)$, hallar (si existe) una función $f(x,y,z)$ tal que

$$\boxed{\nabla f(x,y,z) = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)}$$

Condiciones necesarias

(Por el Teorema de Schwarz)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \qquad (1)$$

Condiciones suficientes

Si $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ están definidas en un paralelepípedo $S \subset \mathbb{R}^3$ y tienen derivadas parciales primeras continuas, entonces las condiciones (1) son suficientes para garantizar la existencia de $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = (P,Q,R)$.

Ejemplo.- Hallar una función $f(x,y,z)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 4xy + z^2 + yz - 2 \qquad && (P),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= xz - 6y^2 - 2x^2 && (Q),\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 9z^2 + 2xz + xy + 6z && (R).
\end{aligned}$$

Solución.- Vemos que

$P'_y = -4x + z = Q'_x,\ P'_z = 2z + y = R'_x,\ Q'_z = x = R'_y.$

Por lo tanto, existe $f(x,y,z)$.

Integrando $f'_x = P \Rightarrow f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + C(y,z)$,

$f(x,y,z) = \int (3x^2 - 4xy + z^2 + yz - 2)\,\mathrm{d}x + C(y,z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x + C(y,z)$

$$f(x,y,z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x + C(y,z)$$

Derivando respecto de y,

$$\begin{aligned} f'_y(x,y,z) = -2x^2 + xz + C'_y(y,z) \\ = Q = xz - 6y^2 - 2x^2. \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$C'_y(y,z) = -6y^2,$$

integrando respecto de y,

$$C(y,z) = \int (-6y^2)\,\mathrm{d}y + C_1(z) = -2y^3 + C_1(z).$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y,z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x - 2y^3 + C_1(z)$$

$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x - 2y^3 + C_1(z)$

Derivando respecto de z,

$f'_z = 2xz + xy + C'_1(z) = R = 9z^2 + 2xz + xy + 6z \Rightarrow$

$C'_1(z) = 9z^2 + 6z \Rightarrow C_1(z) = \int (9z^2 + 6z)\,\mathrm{d}z + C_2 = 3z^3 + 3z^2 + C_2$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y + xz^2 + xyz - 2x \\ - 2y^3 + 3z^3 + 3z^2 + C_2 \end{aligned}$$

Máximos, mínimos y puntos de ensilladura

Definición.- Se dice que una función real $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $\vec{\boldsymbol{a}}$ de un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ si

$$f(\vec{\boldsymbol{x}}) \leq f(\vec{\boldsymbol{a}}) \qquad (2)$$

para todo $\vec{\boldsymbol{x}} \in S$. El número $f(\vec{\boldsymbol{a}})$ se llama *máximo absoluto de* $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ *en* S. Se dice que la función $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ tiene un *máximo relativo* en $\vec{\boldsymbol{a}}$ si la desigualdad (2) se satisface para todo $\vec{\boldsymbol{x}}$ de la intersección de un cierto entorno $B(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta)$ de $\vec{\boldsymbol{a}}$ con S.

$f(\vec{\boldsymbol{x}}) \leq f(\vec{\boldsymbol{a}})$, para todo $\vec{\boldsymbol{x}} \in B(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta) \cap S$.

Para $\delta > 0$, $B(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta) := \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \colon \|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{a}}\| < \delta\}$.

Notaciones

$\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{\boldsymbol{x}}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función real de n variables, $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Si $n = 2$ escribimos $f(x_1, x_2)$ o bien $f(x, y)$. Si $n = 3$, queda $f(x_1, x_2, x_3)$ o bien $f(x, y, z)$.

<u>Caso $n = 2$.</u> $f(x_1, x_2)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$ si

$$f(a_1, a_2) \leq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0) de S, con S subconjunto del plano x, y, si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x, y)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0) de S, si existe un entorno $B\Big((x_0, y_0), \delta\Big)$ de (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B\Big((x_0, y_0), \delta\Big) \cap S.$$

Otra terminología

global $\Leftrightarrow$ absoluto

local $\Leftrightarrow$ relativo

"Piensa . . . , pero actúa . . . "

<u>Caso $n = 3$.</u> $f(x_1, x_2, x_3)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2, a_3) \in S \subset \mathbb{R}^3$ si

$$f(a_1, a_2, a_3) \le f(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y, z)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S, con S subconjunto del espacio x, y, z, si

$$f(x_0, y_0, z_0) \le f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x, y, z)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S, si existe un entorno $B\Big((x_0, y_0, z_0), \delta\Big)$ de (x_0, y_0, z_0) tal que $f(x_0, y_0, z_0) \le f(x, y, z)$ $\forall (x, y, z) \in B\Big((x_0, y_0, z_0), \delta\Big) \cap S$.

Condición necesaria para máximo o mínimo relativo

Teorema 1.-*Si f(x,y) tiene un mínimo relativo en el punto* (x_0, y_0) *y admite derivadas parciales en ese punto, entonces*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Demostración.- Si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0), entonces $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ para todo número real x suficientemente próximo a x_0. Llamando $g(x) := f(x, y_0)$ resulta $g(x_0) \leq g(x)$ para $x \approx x_0$; lo que implica que $g'(x_0) = 0$. Pero, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Considerando la función $h(y) := f(x_0, y)$, se ve que $h(y)$ tiene un mínimo en y_0 y por tanto

$$0 = h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0).$$

■

En general, si $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ tiene un mínimo (o maximo) relativo en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ y existen las derivadas parciales $D_1 f(\vec{\boldsymbol{a}}), \ldots, D_n f(\vec{\boldsymbol{a}})$, se sigue que

$$D_1 f(\vec{\boldsymbol{a}}) = 0, \ldots, D_n f(\vec{\boldsymbol{a}}) = 0;$$

es decir, $\nabla f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Por otra parte, es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en $\vec{\boldsymbol{a}}$ no implica necesariamente la existencia de un mínimo (o máximo) relativo en $\vec{\boldsymbol{a}}$. Esto sucede en los llamados puntos de ensilladura.

Definición.- Supongamos que f sea diferenciable en $\vec{\boldsymbol{a}}$. Si $\nabla f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\mathbf{0}}$ el punto $\vec{\boldsymbol{a}}$ se llama *punto crítico (o estacianario)* de f. Un punto crítico se llama de *ensilladura (o de silla)* si **en todo** entorno $B(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta)$ de $\vec{\boldsymbol{a}}$ hay puntos $\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}$ tales que $f(\vec{\boldsymbol{y}}) < f(\vec{\boldsymbol{a}})$ y $f(\vec{\boldsymbol{z}}) > f(\vec{\boldsymbol{a}})$.

En el caso $n = 1$; esto es, si f es función de una sola variable real x, los puntos donde $f'(x) = 0$ se clasifican en máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Ejemplo 1.- *Máximo relativo*

$z = f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; $f'_x = -2x, f'_y = -2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 2 \geq 2 - (x^2 + y^2) = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 2.- *Mínimo relativo*

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$; $f'_x = 2x, f'_y = 2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 3.- *Punto de ensilladura*

$z = f(x,y) = xy$; $f'_x = y, f'_y = x \Rightarrow (0,0)$ único punto crítico.

$f(0,0) = 0$ y es obvio que existen puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ tan próximos a $(0,0)$ como se desee tales que los números x_1 e y_1 tengan signos iguales y los números x_2 e y_2 tengan signos opuestos.

Ejemplo 4.- El ejemplo canónico.

$$z = f(x,y) = (x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$$

$$f'_x = 2\,x\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} - 2\,x\left(x^2+3\,y^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$$
$$= -2\,x\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-1+x^2+3\,y^2\right)$$

$$f'_y = 6\,y\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} - 2\,y\left(x^2+3\,y^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}$$
$$= -2\,y\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-3+x^2+3\,y^2\right)$$

Como $\mathrm{e}^t > 0$ para todo $t \Rightarrow f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0$;

$f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0.$

<u>puntos críticos</u>

$$\begin{cases} -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0, \\ -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 + x^2 + 3\,y^2 = 0, \\ -3 + x^2 + 3\,y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 3\,y^2 = 1, \\ x^2 + 3\,y^2 = 3. \end{cases} \qquad \text{¡imposible!: incompatible.}$$

Por tanto, si (x, y) es un punto crítico, tiene que ser $x = 0$ ó $y = 0$. Es evidente que $(x, y) = (0, 0)$ es una solución. Si $x = 0, y \neq 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2\,y\left(-3 + 3y^2\right) = 0, \\ -3 + 3y^2 = 0, \\ -1 + y^2 = 0, \\ y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1; \Rightarrow (x, y) = (0, \pm 1) \end{aligned}$$

Si $x \neq 0, y = 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2\,x\left(-1 + x^2\right) = 0, \\ -1 + x^2 = 0, \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; \Rightarrow (x, y) = (\pm 1, 0). \end{aligned}$$

Por lo que hay 5 puntos críticos:

$(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,0)$ y $(1,0)$.

Por la gráfica de $z = f(x,y)$ y el mapa de las curvas de nivel sabemos que: en $(0,0)$ hay un mínimo relativo, en $(0,-1)$ y en $(0,1)$ hay máximos relativos, y en $(-1,0)$ y $(1,0)$ hay puntos de ensilladura.

Pero, ¿qué podemos hacer cuando no dispongamos de estas gráficas? Respuesta: Utilizar el criterio dado en el teorema siguiente.

Naturaleza de un punto crítico por medio de la matriz hessiana

Sea $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ una función real que admite derivadas parciales segundas continuas $D_{ij}f(\vec{\boldsymbol{x}})$ en un entorno de $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$; se define la matriz hessiana de $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ en $\vec{\boldsymbol{a}}$ como sigue

$$H(\vec{\boldsymbol{a}}) := \begin{pmatrix} D_{11}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & D_{12}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & \cdots & D_{1n}f(\vec{\boldsymbol{a}}) \\ D_{21}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & D_{22}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & \cdots & D_{2n}f(\vec{\boldsymbol{a}}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{n1}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & D_{n2}f(\vec{\boldsymbol{a}}) & \cdots & D_{nn}f(\vec{\boldsymbol{a}}) \end{pmatrix}$$

Denotemos por $p_{\vec{\boldsymbol{a}}}(\lambda) := |\lambda I_n - H(\vec{\boldsymbol{a}})|$ el polinomio característico de la matriz $H(\vec{\boldsymbol{a}})$; es un polinomio de grado n en la variable λ. Por ser simétrica la matriz $H(\vec{\boldsymbol{a}})$ todas las raíces de este polinomio son números reales.

Se dice que un número real x es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$

Designamos por $d_1(\vec{a}), d_2(\vec{a}), \ldots, d_n(\vec{a})$ los menores principales de la matriz hessiana:

$$d_1(\vec{a}) := D_{11}f(\vec{a}),\ d_2(\vec{a}) := \begin{vmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) \\ D_{21}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) \end{vmatrix},$$

$$\ldots, d_n(\vec{a}) := |H(\vec{a})|.$$

Teorema 2.- (Criterio ó condiciones suficientes) *Supongamos que $\vec{a}$ es un punto crítico de $f(\vec{x})$.*

(a) *Si $d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un mínimo relativo en $\vec{a}$.*

(b) *Si $(-1)^k d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un máximo relativo en $\vec{a}$.*

(c) *Si el polinomio $p_{\vec{a}}(\lambda)$ tiene al menos una raíz positiva y una raíz negativa, entonces $f(\vec{x})$ tiene un punto de ensilladura en $\vec{a}$.*

Las derivadas parciales segundas de la función $f(x,y) = (x^2+3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$ del Ejemplo 4 son

$$D_{11}f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$$
$$2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(1-5\,x^2-3\,y^2+2\,x^4+6\,y^2x^2\right),$$
$$D_{12}f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$$
$$4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4+x^2+3\,y^2\right),$$
$$D_{21}f(y,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) =$$
$$4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4+x^2+3\,y^2\right),$$
$$D_{22}f(y,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$
$$2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(3-15\,y^2-x^2+2\,y^2x^2+6\,y^4\right).$$

Por lo tanto, la matriz hessiana de $f(x, y)$ en cada uno de los 5 puntos críticos (x_0, y_0)

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 6\mathrm{e} \end{pmatrix}, d_1 = 2\mathrm{e} > 0, d_2 = 12\mathrm{e}^2 > 0,$$

mínimo relativo

$$H(0, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

En el caso de los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, las hipótesis de los apartados (a) y (b) del Teorema 2 no se cumplen. Probemos con (c); el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 4);$$

por tanto, las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ son $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$; la primera es negativa y la segunda es positiva. En consecuencia, los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son puntos de ensilladura.

Ejemplo 5.- Sea $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$. Como $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = -2z$ se ve que $(0,0,0)$ es el único punto crítico. La matriz hessiana $H(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

para todo (x,y,z). Por tanto, su polinomio característico es

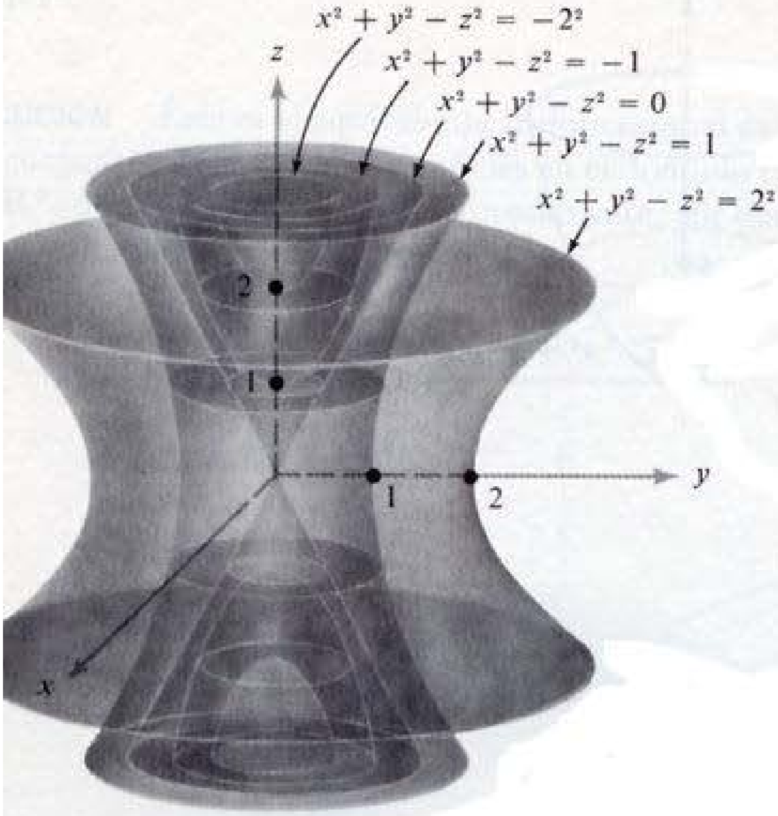
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2);$$

sus raíces son $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = -2$ (simple).

Como tiene al menos una positiva y otra negativa, por Teorema 2, (c), se sigue que $(0, 0, 0)$ es un punto de ensilladura de $f(x, y, z)$.

Una gráfica que contiene algunas superficies de nivel de esta función puede verse en la hoja P–7, que para facilidad del lector incluimos también en la página siguiente.

Obsérvese que la superficie de nivel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es un cono que pasa por $(0, 0, 0)$; que para valores positivos de c la superficie de nivel $x^2 + y^2 - z^2 = c$ consta de una sola hoja y para valores negativos de c cada una de estas superficies está formada por dos hojas situadas en los dos lados del cono.


$x^2 + y^2 - z^2 = -2^2$
$x^2 + y^2 - z^2 = -1$
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
$x^2 + y^2 - z^2 = 2^2$
z
y
x
1
2
1
2

Ajuste por mínimos cuadrados

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales.

Problema.- Hallar los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Es decir, buscar el punto (a, b) que hace mínimo el valor de la función

$$E(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

<u>Solución.-</u> $E(a,b) := \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2.$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2n$$

Puntos críticos

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \qquad a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Sean las medias

$\bar{x} := (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n, \quad \bar{y} = (\sum_{i=1}^{n} y_i)/n;$

es decir, $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de los puntos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$. La ecuación segunda de (3) se puede reescribir como
$a\bar{x} + b = \bar{y}$.

La solución de (3) viene dada por

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

El determinante de la matriz hessiana $H(a,b)$ es igual a

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b}\right)^2 = 2n\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$
$$= 4\left\{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right\}.$$

Desigualdad de Schwarz

$$(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})$$

en efecto, $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \|\vec{\boldsymbol{a}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{b}}\|\cos\theta$; como $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, se sigue que $\|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2\ \|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2\cos^2\theta \leq \|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2\ \|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2$. Si $\cos^2\theta < 1$, entonces $\leq$ se puede refinar a $<$.

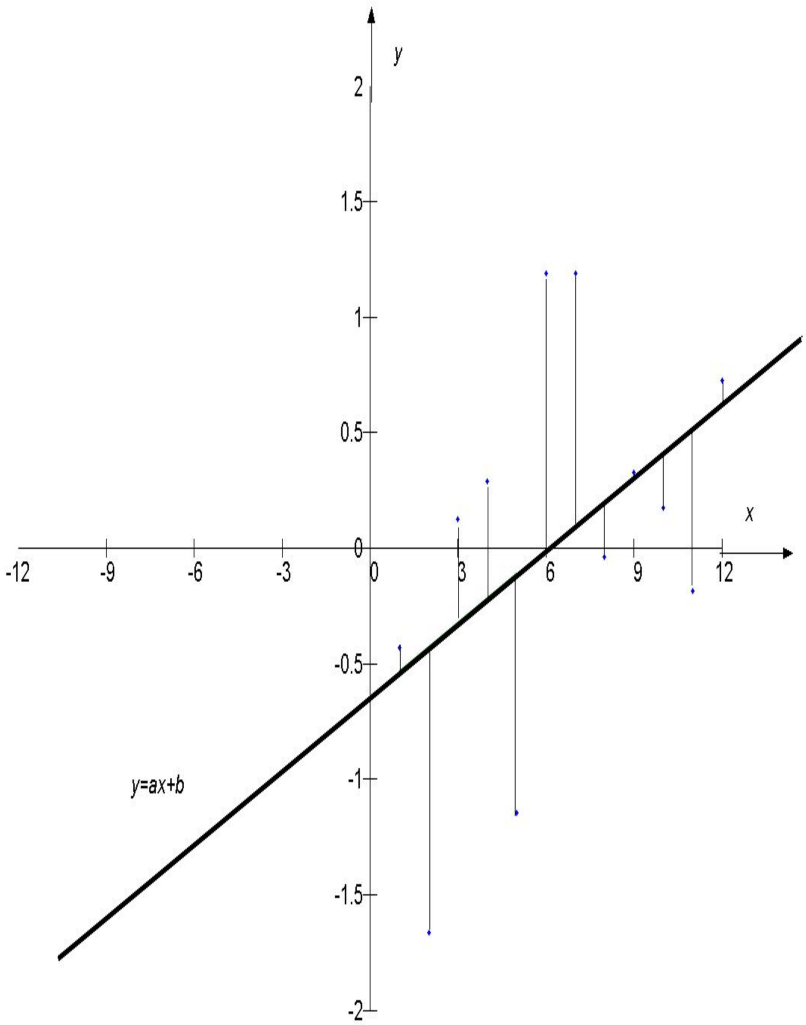
Tomando $\vec{\boldsymbol{e}} := (1,\ldots,1), \vec{\boldsymbol{x}} := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, se deduce que $(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}})(\vec{\boldsymbol{x}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})$. Lo que equivale a $\left(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Como los $x_1,\ldots,x_n$ son distintos se tiene que $\left(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Por lo tanto, el determinante de $H(a, b)$ es positivo; además el elemento de la posición 1,1 de $H(a, b)$ es $\dfrac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$; por el Teorema 2 (a), la función $E(a, b)$ tiene un mínimo relativo en el punto crítico (a, b). Como $E(a, b)$ tiende a infinito cuando a y b tienden a infinito; este mínimo relativo es también mínimo absoluto (pues sólo hay un punto crítico).

Ejemplo.- Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos dados por la tabla siguiente.

x_i	y_i
1	-0.4326
2	-1.6656
3	0.1253
4	0.2877
5	-1.1465
6	1.1909
7	1.1892
8	-0.0376
9	0.3273
10	0.1746
11	-0.1867
12	0.7258

Respuesta: $y = 0{,}1046x - 0{,}6340$.


y
x
y=ax+b
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-12
-9
-6
-3
0
3
6
9
12

Ajuste polinómico por mínimos cuadrados

Problema.- Hallar el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

que mejor se ajusta a los puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos,

$(m+1 \leq n+1)$. Esto es, encontrar el mínimo de la función

$$E(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) := \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i)^2.$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{\partial E}{\partial a_i}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0,$$

$$i = 0, \ldots, m,$$

se obtienen los puntos críticos.

De hecho, este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de *ecuaciones normales*

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_m a_m = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{m+1} a_m = t_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \cdots + s_{2m} a_m = t_m \end{cases}$$

donde

$$s_k := \sum_{i=0}^{n} x_i^k, \quad t_k := \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k.$$

Este sistema de ecuaciones determina los a_j unívocamente, y los a_j resultantes nos dan el mínimo valor posible de E.

Interpolación en varias variables.

Método de Cressman

Supongamos que de una función $f(x,y)$ sólo conocemos sus valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en n puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ del plano. ¿Cómo podríamos conocer otras características de esta función? Por ejemplo, el mapa de sus curvas de nivel.

Se trata de hallar una función $g(x,y)$ que coincida con $f(x,y)$ en los puntos P_k y que sea fácil de manejar. Hay varias formas posibles de hallar una tal $g(x,y)$ (la función de interpolación). Una manera podría ser partir de un polinomio

$$p(,x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \\ a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

y determinar los coeficientes a_{ij} imponiendo las condiciones $p(P_k) = v_k$.

Nosotros explicaremos el método de Cressman que se utiliza en meteorología. Para todo punto $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que no sea uno de los P_k definimos $g(X)$ como la media aritmética ponderada de los valores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tomando como pesos de ponderación los inversos de las distancias del punto X a los puntos P_k; es decir,

$$g(X) := \frac{w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n}{w_1 + \cdots + w_n} \tag{4}$$

siendo

$$w_k := \frac{1}{\mathrm{d}(X, P_k)^2},\ k = 1, \ldots, n.$$

En los puntos P_k, se define $g(P_k) := v_k$. Esta definición de la función de interpolación $g(X)$ cuando el punto X esta cerca del punto P_j hace que el valor v_j sea el preponderante a la hora de asignar un valor a X.

La función $g(x, y)$ es continua en todo punto del plano y admite derivadas parciales nulas en los puntos P_k.

Ejemplo.- Sea la función $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$ del Ejemplo canónico. Tomamos una malla de $21 \times 21 = 441$ puntos en el rectángulo $[-2,2] \times [-2,2]$ dividiendo cada uno de los intervalos $[-2,2]$ en 20 subintervalos iguales. Después calculamos por el método de Cressman la función $g(x,y)$ que coincide con $f(x,y)$ en cada uno de esos 441 puntos. Finalmente, comparamos las gráficas y mapas de curvas de nivel de las dos funciones: la exacta $f(x,y)$ y su aproximada $g(x,y)$.

Cressman modificado. A fin de suavizar la forma de la superficie $z = g(x,y)$ podemos cambiar ligeramente el denominador que define cada peso $w_k(X)$ añadiéndole 0,001:

$$w_k(X) := \frac{1}{\mathrm{d}(X,P_k)^2 + 0{,}001},\ k = 1,\dots,n;$$

con esta definición cada valor $g(x_i,y_i)$ es directamente calculable por la fórmula (4).

Ejercicios

Ejercicio 31.-

Sean $f(x,y)$ diferenciable, $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$. Definimos $\varphi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Hallar $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$ en función de las derivadas parciales de $f(x,y)$.

Respuesta

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = &-r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\ &- r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\\ &- r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 32.-

El cambio de variables $x = u + v, y = uv^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto $u = 1, v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

en el punto $x = 2, y = 1$.

Respuesta.- 8

Ejercicio 33.-

En cada uno de los casos siguientes, determinar si la expresión dada es la diferencial de una función $f(x, y, z)$. En los casos afirmativos, hallarla.

- $(2x - y + 3z)\,\mathrm{d}x + (3y + 2z - x)\,\mathrm{d}y + (2x + 3y - z)\,\mathrm{d}z$

- $(2xy + z^2)\,\mathrm{d}x + (2yz + x^2)\,\mathrm{d}y + (2xz + y^2)\,\mathrm{d}z$

- $(\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \cos z)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y \cos z)\,\mathrm{d}y + (\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z)\,\mathrm{d}z$

Ejercicio 34.-

Sabiendo que $\nabla f(x, y, z)$ es paralelo al vector $(1, 2, -1)$ para todo (x, y, z), demostrar que $f(0, 0, -1) = f(1, -1, -2)$.

Ejercicio 35.-

Sea (x_0, y_0) un punto crítico de una función $f(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto (x_0, y_0). Sea Δ el determinante de la matriz hessiana de $f(x, y)$ en dicho punto.

Demostrar que si $\Delta < 0$, la función $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en (x_0, y_0).

Ejercicio 36.-

Sea $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Deducir por observación de las curvas de nivel que $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

Ejercicio 37.-

Sea $z = f(x, y) = x^2y^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Probar que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 38.-

Para cada una de las funciones siguientes identificar y clasificar los puntos estacionarios:

1. $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

2. $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$.

3. $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

4. $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

5. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.

6. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

7. $f(x,y)=x^3-3xy^2+y^3$.

8. $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$.

9. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

10. $f(x,y)=\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$. El seno y el coseno hiperbólicos de t se definen así $\operatorname{sh} t := (\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})/2$, $\operatorname{ch} t := (\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})/2$. Es fácil verificar que $(\operatorname{sh} t)'=\operatorname{ch} t, (\operatorname{ch} t)'=\operatorname{sh} t$.

11. $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

12. $f(x,y)=(5x+7y-25)\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$.

13. $f(x,y)=\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$.

14. $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, (x>0)$.

15. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Respuestas.-

1. Mínimo absoluto en $(0,1)$.

2. Punto de ensilladura en $(0,1)$.

3. Punto de ensilladura en $(0,0)$.

4. Mínimo absoluto en cada punto de la recta $y = x + 1$.

5. Punto de ensilladura en $(1,1)$.

6. Mínimo absoluto en $(1,0)$.

7. Punto de ensilladura en $(0,0)$.

8. Punto de ensilladura en $(0,6)$ y en $(x,0)$, para todo x; mínimo relativo en $(0,y), 0<y<6$; máximo relativo en $(2,3)$ y en $(0,y)$ para $y<0$ e $y>6$.

9. Punto de ensilladura en $(0,0)$; mínimo relativo en $(1,1)$.

10. Puntos de ensilladura en $(n\pi+\pi/2,0)$, siendo n un entero.

11. Mínimo absoluto en $(0,0)$; punto de ensilladura en $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$.

12. Mínimo absoluto en $(-\frac{1}{26},-\frac{3}{26})$; máximo absoluto en $(1,3)$.

13. Máximo absoluto en $(\pi/3,\pi/3)$; mínimo absoluto en $(2\pi/3,2\pi/3)$; máximo relativo en (π,π); mínimo relativo en $(0,0)$; puntos de ensilladura en $(0,\pi)$ y $(\pi,0)$.

14. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.

15. Máximo absoluto en cada punto de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$; mínimo absoluto en $(0, 0)$.

Ejercicio 39.-

Ajuste por mínimos cuadrados. Dados los puntos $(x_0, y_0) = (3, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, -3)$; $(x_2, y_2) = (5, 1)$ y $(x_3, y_3) = (7, 3)$.

1. Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos.

2. Hallar el polinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos; en este caso, se debe buscar el mínimo de la función $E(a, b, c)$ de las variables a, b, c, dada por

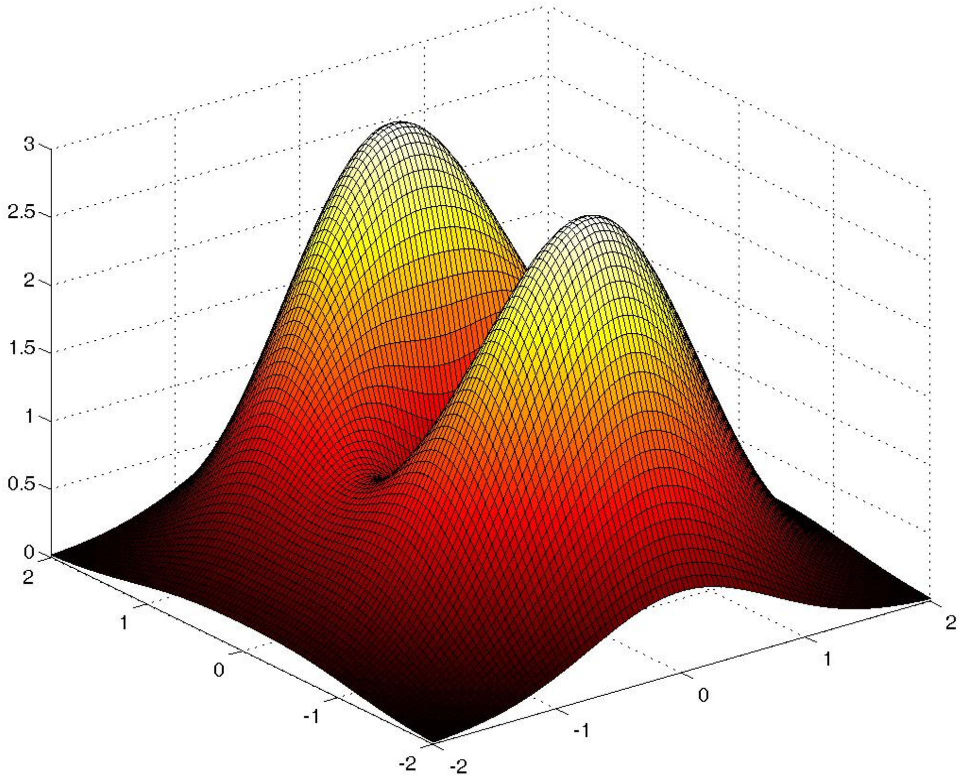
$$E(a, b, c) := \sum_{i=0}^{3} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

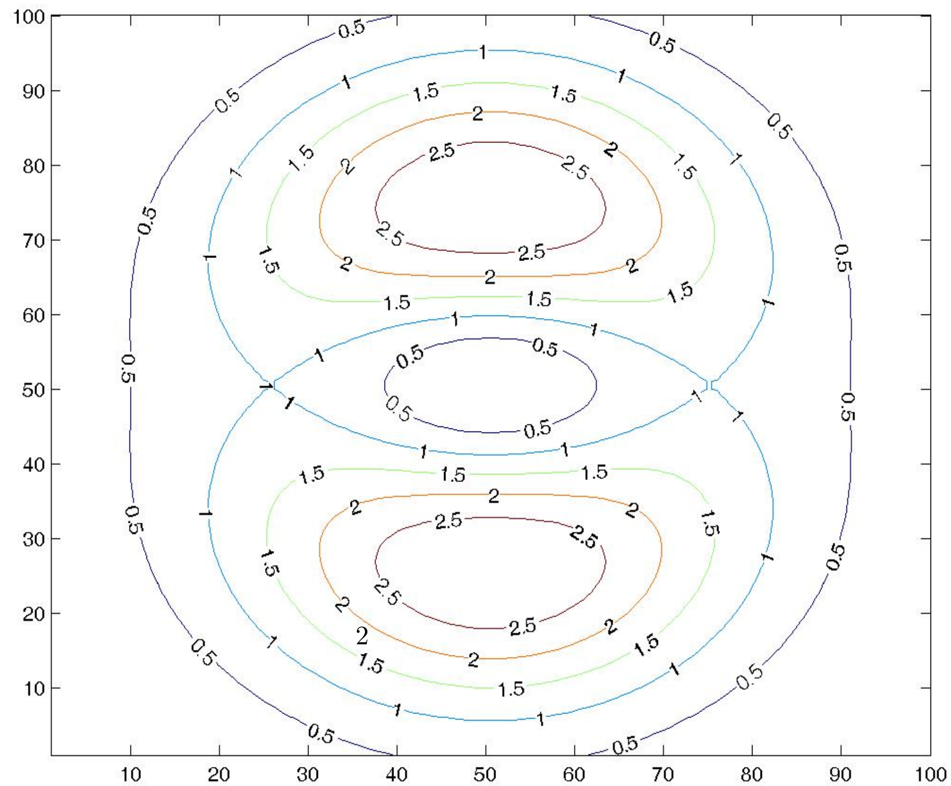
Respuestas.-

1. $y = 0{,}3500x - 0{,}6500.$

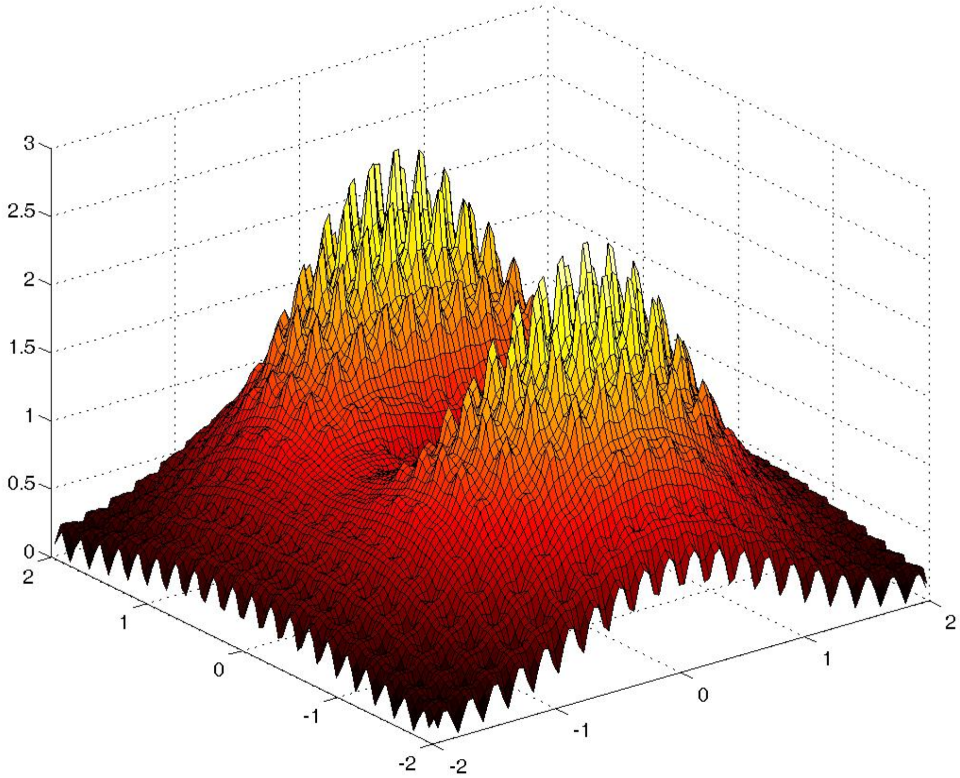
2. $a = 0{,}4375, b = -3{,}1500, c = 4{,}1625.$

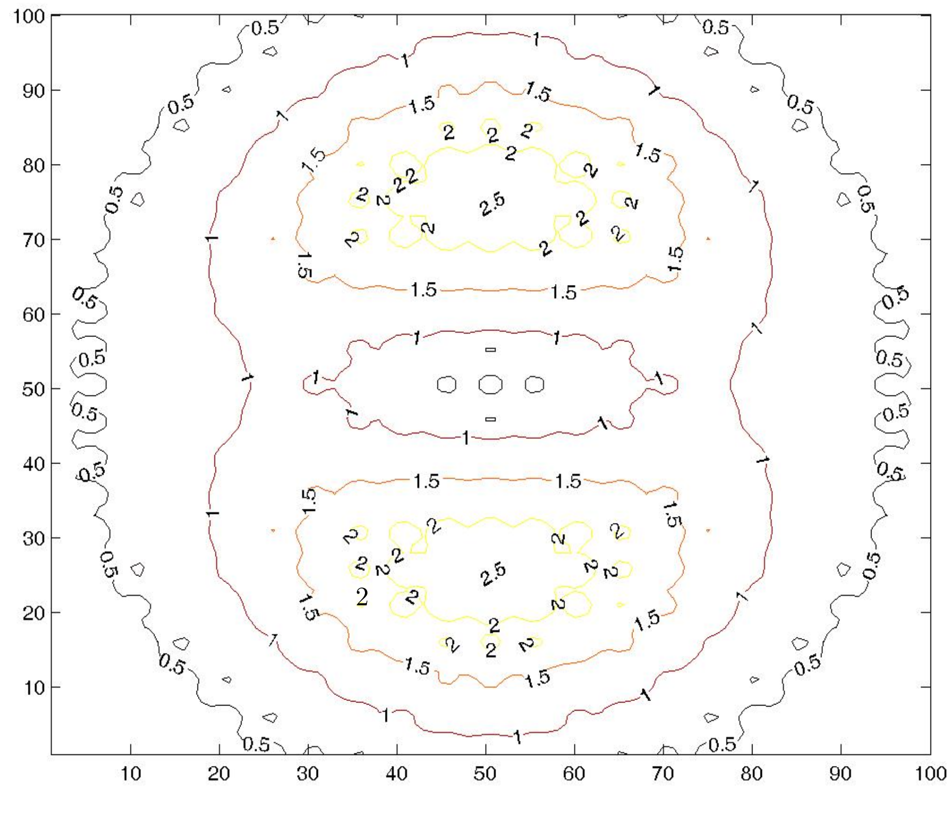
1. Imágenes de la función $f(x, y)$





Imágenes de la función interpolante $g(x, y)$ por el método de Cressman





Imágenes de la función interpolante $g(x, y)$ por el método de Cressman modificado