Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Juan-Miguel Gracia

Índice

Índice

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Si $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ son tres funciones reales de la variable real t, la función vectorial $\mathbf{x}(t)$ viene dada por

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Por definición, $\mathbf{x}(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t)$$

son derivables en t.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Si $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ son tres funciones reales de la variable real t, la función vectorial $\mathbf{x}(t)$ viene dada por

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Por definición, $\mathbf{x}(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t)$$

son derivables en t.

$$\mathbf{x}'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{x}'(t)$ es la derivada de $\mathbf{x}$ en t.

Ejemplo

Si $x_1(t) = t^2$,$x_2(t) = \cos t$, $x_3(t) = \exp(t^2)$ entonces

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \exp(t^2) \end{pmatrix}$$

es derivable y

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -\operatorname{sen} t \\ 2t\exp(t^2) \end{pmatrix}.$$

Sistema de ecuaciones lineales, en general

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t), \\ x_3'(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t). \end{array}\right. \tag{1}$$

Aquí, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ son las funciones incógnitas.

Sistema de ecuaciones lineales, en general

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t), \\ x_3'(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t). \end{cases} \tag{1}$$

Aquí, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ son las funciones incógnitas. Denotando $\mathbf{A} := (a_{ij})$, podemos escribir el sistema (1) así

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Sistema de ecuaciones lineales, en general

El sistema se escribe de forma resumida así:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{2}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo de coeficientes constantes.

Sistema de ecuaciones lineales, en general

El sistema se escribe de forma resumida así:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{2}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo de coeficientes constantes. Si no hay dudas, en (2) podemos omitir la t:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3}$$

Índice

Búsqueda de una solución especial, 1

Debe quedar claro que $\mathbf{x}$ depende de t, pero $\mathbf{A}$ no depende: $\mathbf{A}$ es constante.
Resolveremos el sistema (2) **bajo ciertas restricciones, muy generales.**

Búsqueda de una solución especial, 1

Debe quedar claro que $\mathbf{x}$ depende de t, pero $\mathbf{A}$ no depende: $\mathbf{A}$ es constante. Resolveremos el sistema (2) **bajo ciertas restricciones, muy generales.** En primer lugar, (Euler) tratamos de ver si existen soluciones de la forma

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}}$$

donde λ_0 es un *número* y $\mathbf{c}$ un *vector columna* distinto de

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suponemos que el vector

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{es constante.}$$

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0 \, e^{\lambda_0 \, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0 \, e^{\lambda_0 \, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0 \, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0 \, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{5}$$

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{Ax}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{Ac} \tag{5}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t)$, de (4) y (5) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{Ac} \tag{6}$$

Dividiendo ambos miembros de (6) por $e^{\lambda_0\, t}$,

$$\lambda_0\, \mathbf{c} = \mathbf{Ac}$$

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{5}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (4) y (5) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{6}$$

Dividiendo ambos miembros de (6) por $e^{\lambda_0\, t}$,

$$\lambda_0\, \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\, \mathbf{c}} \tag{7}$$

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{5}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (4) y (5) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{6}$$

Dividiendo ambos miembros de (6) por $e^{\lambda_0\, t}$,

$$\lambda_0\, \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\, \mathbf{c}} \tag{7}$$

Así pues, (7) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c}$ sea una solución de (1).

Búsqueda de una solución especial, 2

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{4}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{5}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (4) y (5) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{6}$$

Dividiendo ambos miembros de (6) por $e^{\lambda_0\, t}$,

$$\lambda_0\, \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\, \mathbf{c}} \tag{7}$$

Así pues, (7) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c}$ sea una solución de (1). Es fácil ver que (7) es también una condición suficiente.

Búsqueda de una solución especial, 3

Resumiendo:

Proposición 1

La función vectorial $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ *es una solución del sistema diferencial lineal* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *si y sólo si el número* λ_0 *y el vector columna* $\mathbf{c}$ *satisfacen la ecuación algebraica*

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

Nota.- La función nula $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (1), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ tratamos de encontrar un vector $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}$.

Búsqueda de una solución especial, 3

Resumiendo:

Proposición 1

La función vectorial $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ *es una solución del sistema diferencial lineal* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *si y sólo si el número* λ_0 *y el vector columna* $\mathbf{c}$ *satisfacen la ecuación algebraica*

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

Nota.- La función nula $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (1), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ tratamos de encontrar un vector $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}$. Esta ecuación es equivalente a $\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{I}\mathbf{c}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz unidad de orden 3:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Búsqueda de una solución especial, 5

La ecuación

$$\mathbf{Ac} = \lambda_0 \, \mathbf{Ic}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}) \, \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Si **c** ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

tiene que ser igual a 0.

Búsqueda de una solución especial, 5

La ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{I}\mathbf{c}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{c}$ ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| \tag{8}$$

Búsqueda de una solución especial, 6

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda\, \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \tag{9}$$

Búsqueda de una solución especial, 6

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \tag{9}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

en las incógnitas c_1, c_2, c_3. Una solución $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ de (10) con no todas las componentes c_1, c_2, c_3 nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

Índice

Valores y vectores propios

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden 3 se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector columna tridimensional $\mathbf{c}$ no nulo t.q.

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

Valores y vectores propios

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden 3 se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector columna tridimensional $\mathbf{c}$ no nulo t.q.

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

El vector $\mathbf{c}$ se llama *vector propio* de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_0.

Otras terminologías equivalentes

λ_0	$\mathbf{c}$
valor propio	vector propio
autovalor	autovector
valor característico	vector característico
eigenvalue	*eigenvector*

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 1

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado.

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 1

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{12}$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 2

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (12):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 2

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (12):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$,

resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 3

Escribimos este sistema en la forma

$$\begin{cases} c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 3

Escribimos este sistema en la forma

$$\left\{\begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\left\{\begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 4

Este sistema es equivalente al anterior. Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\begin{cases} \quad\quad\quad c_2 = 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 = -c_3 \end{cases}$$

Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 4

Este sistema es equivalente al anterior. Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\begin{cases} c_2 = 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 = -c_3 \end{cases}$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\begin{cases} c_2 = 4 \\ -3c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{c_2 = 4};$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \Longrightarrow \boxed{c_1 = -1}$$

Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Índice

Ejemplo de aplicación a los sistemas

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4\,e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema diferencial lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hemos terminado el ejemplo.

Índice

Problema de condiciones iniciales

Sea ahora un $\mathbf{x^0}$ un vector columna dado de 3 componentes:

$$\mathbf{x^0} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}.$$

Problema de condiciones iniciales

Sea ahora un $\mathbf{x^0}$ un vector columna dado de 3 componentes:

$$\mathbf{x^0} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el problema de hallar la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x^0}$:

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}'(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = & \mathbf{x^0} \end{array} \right.$$

Problema de condiciones iniciales

Sea ahora un $\mathbf{x^0}$ un vector columna dado de 3 componentes:

$$\mathbf{x^0} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el problema de hallar la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x^0}$:

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}'(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = & \mathbf{x^0} \end{array} \right.$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c}$.

Hipótesis Suplementaria

Supondremos desde ahora que la matriz de tercer orden , **A**, tiene tres valores propios distintos.

Hipótesis Suplementaria

Supondremos desde ahora que la matriz de tercer orden , $\mathbf{A}$, tiene tres valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus tres raíces simples.

Hipótesis Suplementaria

Supondremos desde ahora que la matriz de tercer orden , $\mathbf{A}$, tiene tres valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus tres raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución.

Hipótesis Suplementaria

Supondremos desde ahora que la matriz de tercer orden , $\mathbf{A}$, tiene tres valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus tres raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí.

Hipótesis Suplementaria

Supondremos desde ahora que la matriz de tercer orden , **A**, tiene tres valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus tres raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los valores propios de la matriz **A**. Estamos suponiendo que son tres números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ vectores propios de **A** asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

Teorema 2

Si los tres valores propios de **A** *son distintos, entonces los vectores propios* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ *son linealmente independientes.*

Sin demostración.

Solución del problema (P_0)

Expresemos $\mathbf{x^0}$ como combinación lineal de los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x^0} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3.$$

Tal combinación existe y es única pues $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es una base del espacio formado por todos los vectores columna 3×1.

Solución del problema (P_0)

Expresemos $\mathbf{x^0}$ como combinación lineal de los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x^0} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3.$$

Tal combinación existe y es única pues $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es una base del espacio formado por todos los vectores columna 3×1. La solución de (P_0) viene dada por la fórmula

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t} \mathbf{c}_3.}$$

Solución del problema (P_0)

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \lambda_3 \mathbf{c}_3;$$

Solución del problema (P_0)

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t}\lambda_3 \mathbf{c}_3;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Solución del problema (P_0)

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t}\lambda_3 \mathbf{c}_3;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, 3$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_3 \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{c}_3\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Solución del problema (P_0)

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \lambda_3 \mathbf{c}_3;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, 3$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_3 \\ &= \mathbf{A} \left(\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{c}_3 \right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} \mathbf{c}_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 \cdot 0} \mathbf{c}_3 =$$

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{x}^{\mathbf{0}}.$$

$\square$

Ejemplo de problema de condiciones iniciales

Resolver el problema de condición inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución, 1

La matriz **A** es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de **A** : $\lambda_1 = 1$.

Solución, 1

La matriz **A** es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de **A** : $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.

Solución, 1

La matriz **A** es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de **A** : $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.
Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Solución, 1

La matriz **A** es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de **A** : $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.
Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

Solución, 2

	1	-2	-5	6
-2		-2	8	-6
	1	-4	3	0

Solución, 2

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
-2 & & -2 & 8 & -6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad \lambda_3 = -2 \text{ es una raíz.}
$$

Solución, 3

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array} \implies \lambda_1 = 1 \text{ es una raíz.}$$

Solución, 4

Como las *tres* raíces del polinomio característico de $\mathbf{A}$, $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$, son *simples* (y $\mathbf{A}$ es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*.

Solución, 4

Como las *tres* raíces del polinomio característico de $\mathbf{A}$, $|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|$, son *simples* (y $\mathbf{A}$ es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*. Por lo tanto, podemos aplicar el método de resolución dado a este sistema diferencial lineal.

Calculamos un vector propio $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ asociado a cada uno de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución, 5

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{0}} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Solución, 5

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{0}} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

Solución, 5

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x^0}$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x^0} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

cuya solución es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 0, -4/3)$.

Solución, 6

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución, 6

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{t}}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} =$$

Solución, 6

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{t}}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{t} + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 4(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \mathrm{e}^{t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Ejercicio 1.- Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ (e^{7t} + e^{-5t})/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Ejercicio 2.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

Solución.-

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{4t} + 3e^{-t} \\ 3e^{4t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Ejercicio 3.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = \quad - x_2(t) \\ x_3'(t) = \quad - x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_1(0) = -2 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 3. \end{cases} \end{cases}$$