Funciones linealmente independientes

Juan-Miguel Gracia

Funciones linealmente independientes

Definición 1

Sean $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Diremos que estas funciones son **linealmente independientes** en I si la relación: Para todo $t \in I$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son **linealmente dependientes** en I.

Funciones linealmente independientes

Definición 1

Sean $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Diremos que estas funciones son **linealmente independientes** en I si la relación: Para todo $t \in I$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son **linealmente dependientes** en I.

Funciones linealmente independientes

Definición 1

Sean $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Diremos que estas funciones son **linealmente independientes** en I si la relación: Para todo $t \in I$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son **linealmente dependientes** en I.

Ejemplo 1

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,$$
$$\forall t, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0. \Rightarrow$ las funciones $t+2$ y $t-2$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,$$
$$\forall t, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0.\Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\begin{aligned} \forall t, \quad & \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \forall t, \quad & (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0$. $\Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,$$
$$\forall t, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0.\Rightarrow$ las funciones $t+2$ y $t-2$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

Ejemplo 2

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

Ejemplo 2

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

Sigue el ejemplo 2

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{e^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente t, e^{2t}, te^{2t} son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Sigue el ejemplo 2

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Sigue el ejemplo 2

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 3. De carácter gráfico.

Decir si las tres funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ representadas gráficamente en cada una de las Figuras 1 y 2 son linealmente independientes en el intervalo $[a, b]$.

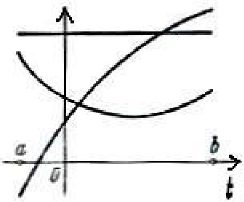


Fig. 1

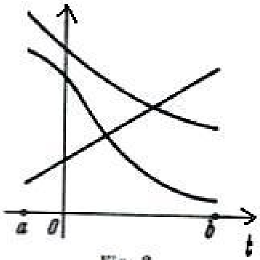
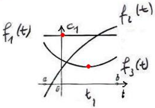


Fig. 2

Figura: Funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$.

Solución.- Fig. 1



si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0 \quad (1) \quad \forall t \in [a,b],$$

entonces,

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_2 f_2'(t) + \alpha_3 f_3'(t) = 0 \quad \forall t \quad (3)$$

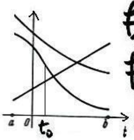
como $f_3'(t_1) = 0$ y $f_2'(t_1) > 0 \Rightarrow$

$$\alpha_2 f_2'(t_1) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

(3) $\Rightarrow \quad \alpha_3 f_3'(t) = 0$ si $t \neq t_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

(2) $\Rightarrow \quad \alpha_1 c_1 = 0$ y como $c_1 \neq 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f_1, f_2, f_3$ son linealmente independientes en $[a,b]$.



$f_1(t) = mt + b$

$f_2(t)$

$f_3(t)$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0$$

$$\alpha_1 f_1'(t) + \alpha_2 f_2'(t) + \alpha_3 f_3'(t) = 0$$

$$\alpha_1 m + \alpha_2 f_2'(t) + \alpha_3 f_3'(t) = 0$$

$$\alpha_2 f_2''(t) + \alpha_3 f_3''(t) = 0$$

Como $f_3''(t_0) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_2 f_2''(t_0) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow$$

$f_2''(t_0) > 0$

$$\alpha_1 m + \alpha_3 f_3'(t) = 0$$

$$\alpha_3 f_3'(t) = -\alpha_1 m$$

Si $\alpha_3 \neq 0 \Rightarrow f_3'(t) = \underline{\text{cte.}} \Rightarrow f_3(t)$ sería una recta.

$\Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 f_1(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Son lin. indeps.