

Ampliación de Matemáticas

Ejercicios, 27 de marzo de 2009

Ejercicio 1.- Esbozar el campo de pendientes de la ecuación diferencial $x' = 2x - x^2$. Demostrar que la solución $x(t)$ que satisface la condición inicial $x(0) = 0.3$ es estrictamente creciente y tiende a 2 cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejercicio 2.- Consideremos la ecuación diferencial autónoma $x' = f(x)$, donde la gráfica de $f(x)$ viene dada en la Figura 1.

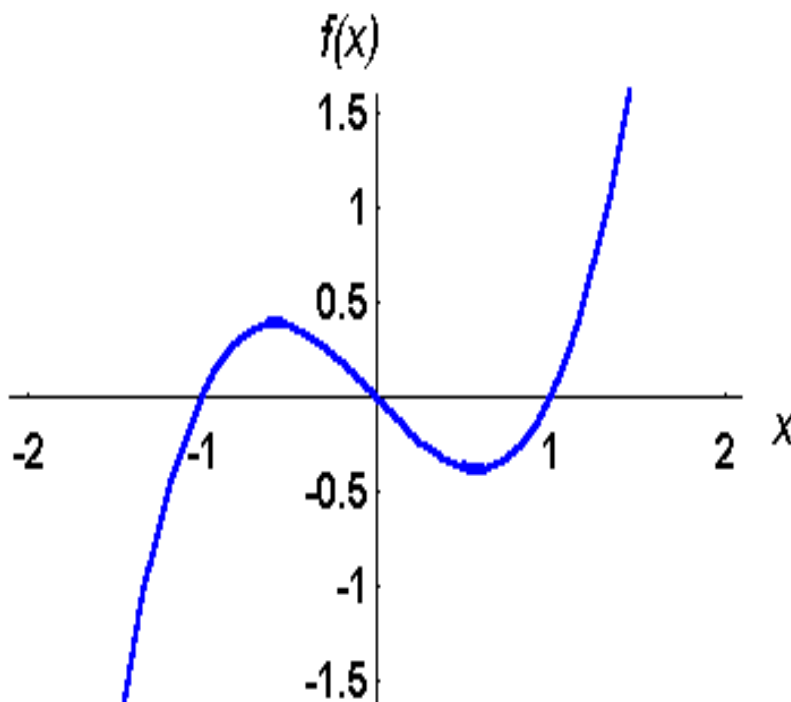


Figura 1: Curva $f(x)$.

- (1) Hacer un esbozo del campo de pendientes de esta ecuación diferencial.
- (2) Trazar la gráfica de la solución $x(t)$ del problema de condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(3) Hallar el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

siendo $x(t)$ la solución de (2).

Ejercicio 3.- Aplicando el método de Euler con 5 pasos en el intervalo $[0, 1]$ obtener una tabla de valores *aproximados* de $x(t)$, siendo $x(t)$ la solución del problema de condición inicial

$$\begin{cases} x' = 3x^2 + tx, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Consideremos la ecuación diferencial autónoma de segundo orden $x'' = f(x, x')$ y sea

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

el sistema de primer orden equivalente, obtenido mediante el cambio de variables $x_1 := x, x_2 := x'$.

La Figura 2 muestra la curva que representa la solución $(x_1(t), x_2(t))$ del sistema (1) que satisface las condiciones iniciales $x_1(0) = -1, x_2(0) = 0,4$ cuando t varía en el intervalo $0 \leq t \leq 14$. También está representado el campo vectorial de este sistema. Los ejes del plano de esta figura son x_1, x_2 .

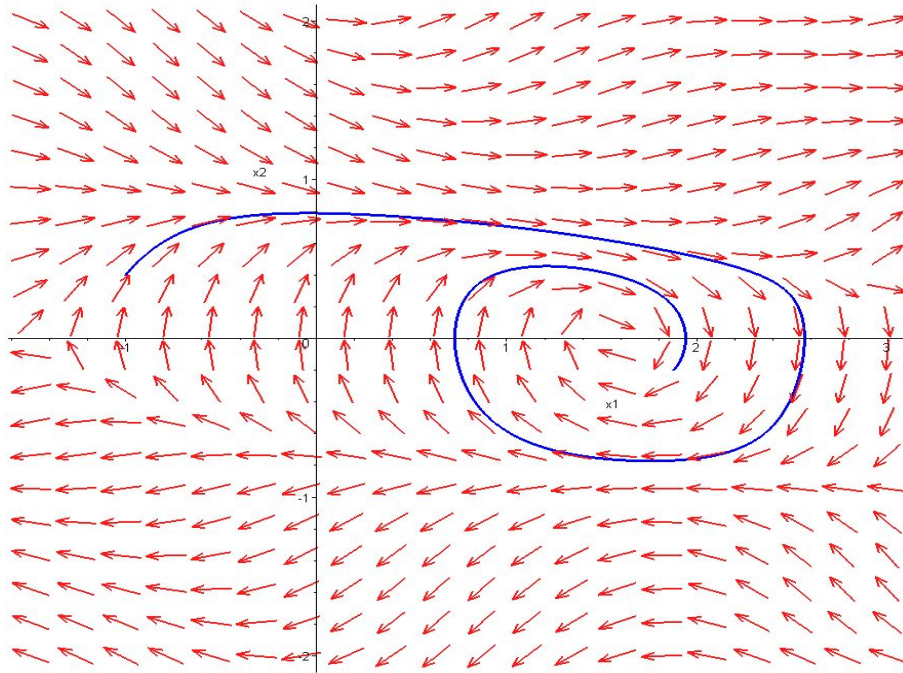


Figura 2: Curva $(x_1(t), x_2(t))$.

Dibujar en un plano t, x la curva que representa la solución $x(t)$ del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' = f(x, x') \\ x(0) = -1 \\ x'(0) = 0,4 \end{cases}$$

Prestar atención a los máximos y mínimos, intervalos de monotonía, concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión.

Ejercicio 5.- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las funciones mostradas en la Figura 3. ¿Es posible que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $x'' = f(t, x, x')$? Razónese.

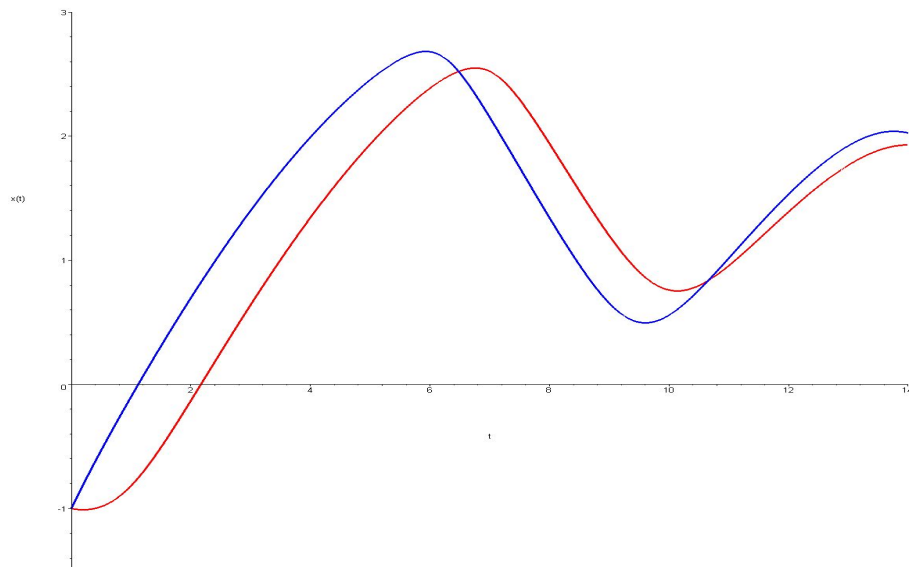


Figura 3: Curvas de $x_1(t), x_2(t)$.

Ejercicio 6.- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las funciones mostradas en la Figura 4. ¿Es posible que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $x'' = f(t, x, x')$? Razónese.

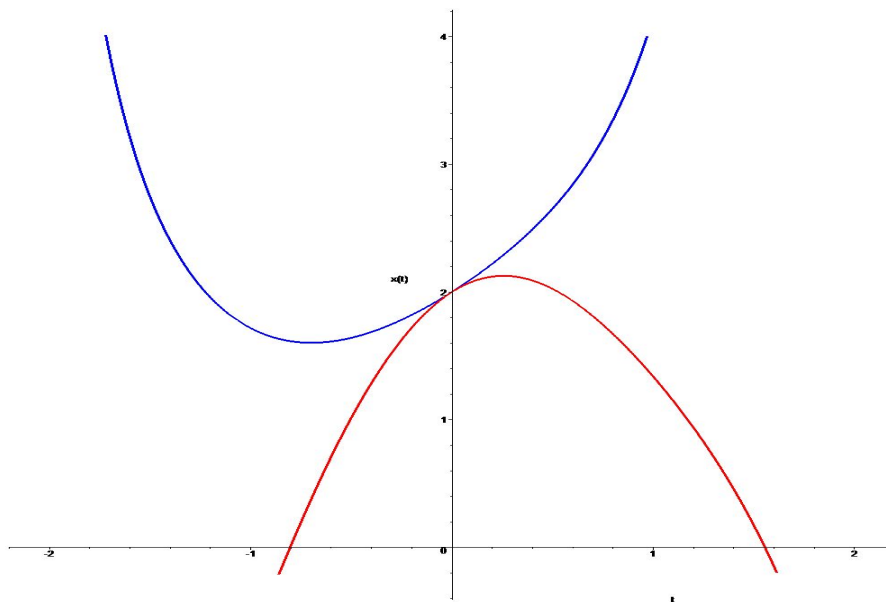


Figura 4: Curvas de $x_1(t), x_2(t)$.

Ejercicio 7.- ¿Por qué no pueden ser las dos curvas mostradas en la Figura 5 siguientes soluciones de una ecuación diferencial de tercer orden $x''' = f(t, x, x', x'')$?

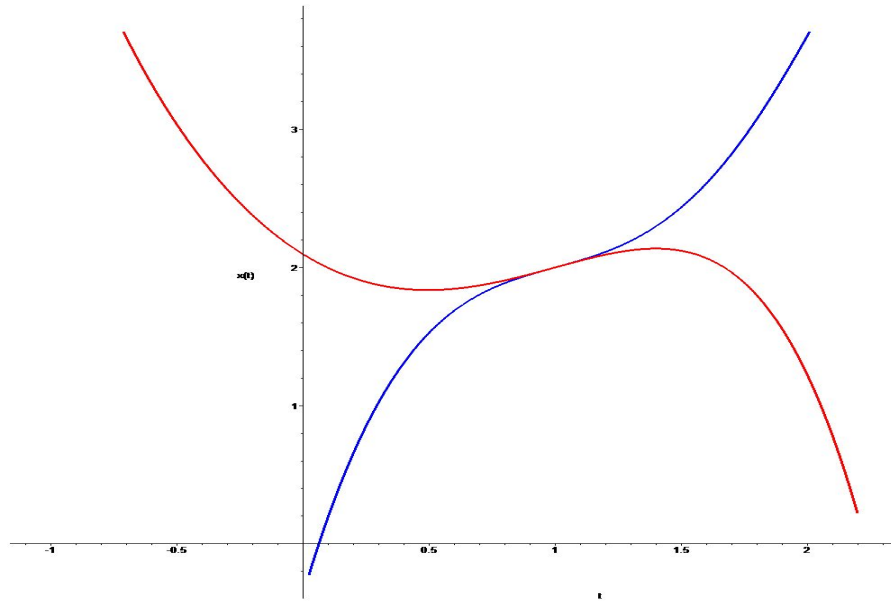


Figura 5: Curvas de $x_1(t), x_2(t)$.