

Ampliación de Matemáticas

Ejercicios, 18 de mayo de 2009

Ejercicio 1.- Resolver las ecuaciones siguientes:

(1) $x'' + x' - 2x = 0$.

(2) $x'' + 4x' + 3x = 0$.

(3) $x'' - 2x' = 0$.

(4) $2x'' - 5x' + 2x = 0$.

Ejercicio 2.- Demostrar que las ecuaciones diferenciales

$$x'' - 5x' + 6x = t$$

$$x'' - 2x' - 3x = t/2$$

no tienen soluciones comunes.

Ejercicio 3.- De entre todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$x'' - x = 0$$

que satisfacen la condición $x(0) = 1$, hallar la solución $x(t)$ que hace mínima la integral

$$\int_0^{\ln 2} [x(t)]^2 dt.$$

Ejercicio 4.- En cada uno de los dos casos, dadas las tres funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ representadas gráficamente en la Figura 1 ¿son linealmente independientes en $[a, b]$?

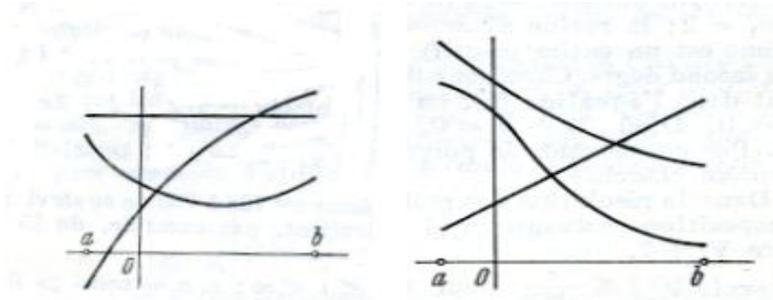


Figura 1: Funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$.

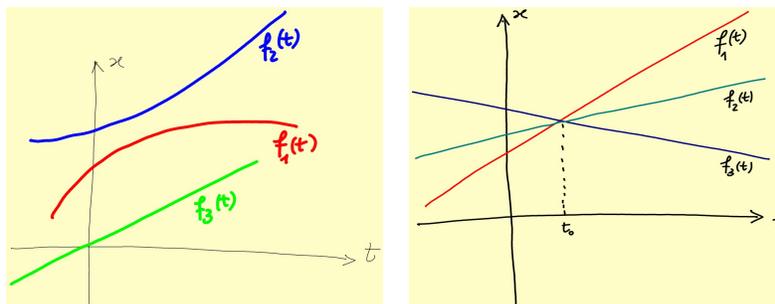


Figura 2: Funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$.

Ejercicio 4 bis.- En cada uno de los dos casos, dadas las tres funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ representadas gráficamente en la Figura 2 ¿son linealmente independientes en $[a, b]$?

Ejercicio 5.- Demostrar que si $q(t) < 0$ las soluciones de la ecuación diferencial $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ no admiten máximos positivos.

Ejercicio 6.- ¿Son linealmente independientes las funciones e^{-t} , e^{-t^2} en \mathbb{R} ?

Ejercicio 7.- ¿Son linealmente independientes las funciones t , $\ln t$, e^{t^2} en el intervalo $(0, \infty)$?

Ejercicio 8.- Establecer si las funciones dadas son linealmente independientes en \mathbb{R} :

- (1) $6t + 9$, $8t + 12$.
- (2) $\sin t$, $\cos t$.
- (3) 1 , t , t^2 .
- (4) $4 - t$, $2t + 3$, $6t + 8$.
- (5) $t^2 + 2t$, $3t^2 - 1$, $t + 4$.
- (6) $e^t e^{2t}$, e^{3t} .
- (7) t , e^t , te^t .

Ejercicio 9.- Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ tres funciones de las que conocemos sus tablas de valores:

| t | $f_1(t)$ | $f_2(t)$ | $f_3(t)$ |
|-----|----------|----------|----------|
| 1.0 | 1.0000 | -2.0000 | 0.6931 |
| 1.1 | 1.2100 | -1.7900 | 0.7419 |
| 1.2 | 1.4400 | -1.5600 | 0.7885 |
| 1.3 | 1.6900 | -1.3100 | 0.8329 |
| 1.4 | 1.9600 | -1.0400 | 0.8755 |
| 1.5 | 2.2500 | -0.7500 | 0.9163 |
| 1.6 | 2.5600 | -0.4400 | 0.9555 |
| 1.7 | 2.8900 | -0.1100 | 0.9933 |
| 1.8 | 3.2400 | 0.2400 | 1.0296 |
| 1.9 | 3.6100 | 0.6100 | 1.0647 |
| 2.0 | 4.0000 | 1.0000 | 1.0986 |

Deducir si son linealmente independientes en el intervalo $[1, 2]$.

Ejercicio 10.- Hallar tres soluciones linealmente independientes de la forma e^{rt} de la ecuación diferencial $x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0$.