

Extensión de la regla de la cadena

Funciones diferenciables.

$$z = f(x, y), \quad x = x(u, v, w), y = y(u, v, w)$$

$$z = f(x(u, v, w), y(u, v, w)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w}$$

$$z'_u(u_0, v_0, w_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0, w_0)$$

$$+ f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0, w_0)$$

$$x_0 := x(u_0, v_0, w_0), \quad y_0 := y(u_0, v_0, w_0).$$

Ejemplo 1

$x(u, v, w) := u + v - w^2, y(u, v, w) := uv^3w,$
 $z = f(x, y)$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$ en función de
 $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \frac{\partial x}{\partial w} = -2w$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^3w, \frac{\partial y}{\partial v} = 3uv^2w, \frac{\partial y}{\partial w} = uv^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} v^3w$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} 3uv^2w$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{\partial f}{\partial x} 2w + \frac{\partial f}{\partial y} uv^3$$

Ejemplo 2 La temperatura en una placa delgada se representa por la función real f , siendo $f(x, y)$ la temperatura en (x, y) . Introduciendo coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, la temperatura se convierte en una función de r y θ determinada por la ecuación

$$\varphi(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Expresar $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ en términos de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \end{aligned}$$

Máximos, mínimos y puntos de ensilladura

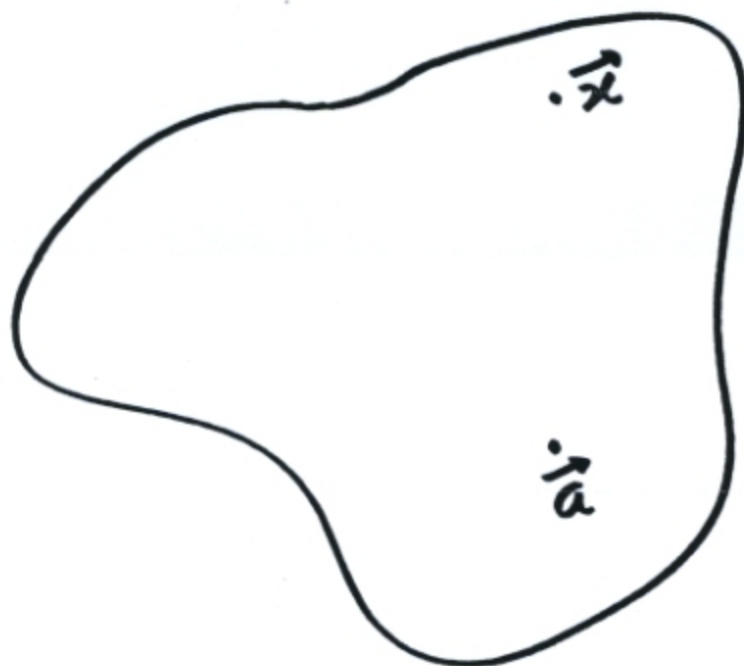
Definición.- Se dice que una función real $f(\vec{x})$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $\vec{a}$ de un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ si

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad (2)$$

para todo $\vec{x} \in S$. El número $f(\vec{a})$ se llama *máximo absoluto de $f(\vec{x})$ en S* . Se dice que la función $f(\vec{x})$ tiene un *máximo relativo* en $\vec{a}$ si la desigualdad (2) se satisface para todo $\vec{x}$ de la intersección de un cierto entorno $B(\vec{a}, \delta)$ de $\vec{a}$ con S .

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}), \text{ para todo } \vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) \cap S.$$

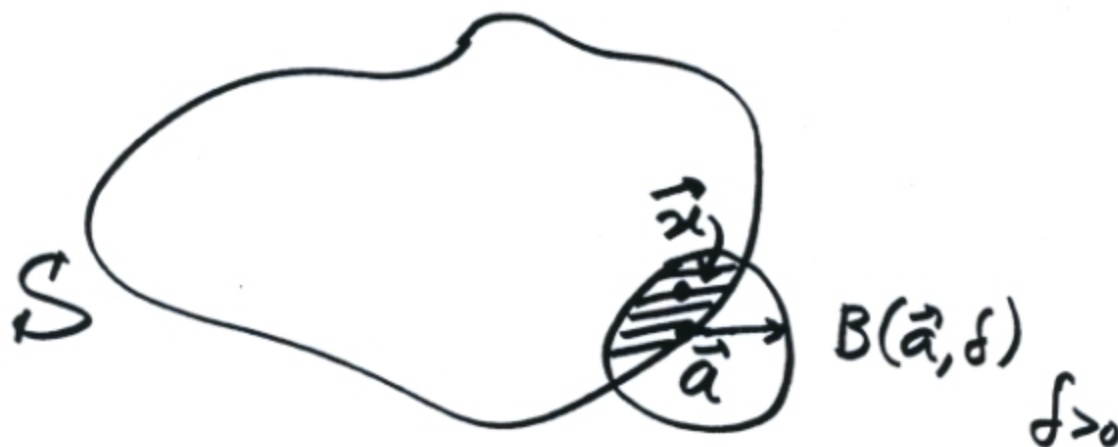
Para $\delta > 0$, $B(\vec{a}, \delta) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta\}$.



$$S$$

$$f(\vec{a}) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in S$$

máximo absoluto en S



$$f(\vec{a}) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) \cap S$$

máximo relativo

Notaciones

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
función real de n variables, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Si $n = 2$ escribimos $f(x_1, x_2)$ o bien $f(x, y)$.
Si $n = 3$, queda $f(x_1, x_2, x_3)$ o bien $f(x, y, z)$.

Caso $n = 2$. $f(x_1, x_2)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$ si

$$f(a_1, a_2) \leq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0) de S , con S subconjunto del plano x, y , si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x, y)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0) de S , si existe un entorno $B((x_0, y_0), \delta)$ de (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap S.$$

Otra terminología

global $\Leftrightarrow$ absoluto

local $\Leftrightarrow$ relativo

“Piensa . . . , pero actúa . . . ”

Caso $n = 3$. $f(x_1, x_2, x_3)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2, a_3) \in S \subset \mathbb{R}^3$ si

$$f(a_1, a_2, a_3) \leq f(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y, z)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S , con S subconjunto del espacio x, y, z , si

$$f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x, y, z)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S , si existe un entorno $B((x_0, y_0, z_0), \delta)$ de (x_0, y_0, z_0) tal que $f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z)$ $\forall (x, y, z) \in B((x_0, y_0, z_0), \delta) \cap S$.

Condición necesaria para máximo o mínimo relativo

Teorema 1.- Si $f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en el punto (x_0, y_0) y admite derivadas parciales en ese punto, entonces

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Demostración.- Si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0) , entonces $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ para todo número real x suficientemente próximo a x_0 . Llamando $g(x) := f(x, y_0)$ resulta $g(x_0) \leq g(x)$ para $x \approx x_0$; lo que implica que $g'(x_0) = 0$. Pero, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Considerando la función $h(y) := f(x_0, y)$, se ve que $h(y)$ tiene un mínimo en y_0 y por tanto

$$0 = h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0).$$



En general, si $f(\vec{x})$ tiene un mínimo (o máximo) relativo en el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y existen las derivadas parciales $D_1f(\vec{a}), \dots, D_nf(\vec{a})$, se sigue que

$$D_1f(\vec{a}) = 0, \dots, D_nf(\vec{a}) = 0;$$

es decir, $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$. Por otra parte, es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en $\vec{a}$ no implica necesariamente la existencia de un mínimo (o máximo) relativo en $\vec{a}$. Esto sucede en los llamados puntos de ensilladura.

Definición.- Supongamos que f sea diferenciable en $\vec{a}$. Si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ el punto $\vec{a}$ se llama *punto crítico (o estacionario)* de f . Un punto crítico se llama de *ensilladura (o de silla)* si **en todo** entorno $B(\vec{a}, \delta)$ de $\vec{a}$ hay puntos $\vec{y}, \vec{z}$ tales que $f(\vec{y}) < f(\vec{a})$ y $f(\vec{z}) > f(\vec{a})$.

En el caso $n = 1$; esto es, si f es función de una sola variable real x , los puntos donde $f'(x) = 0$ se clasifican en máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Ejemplo 1.- Máximo relativo

$$z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2; f'_x = -2x, f'_y = -2y \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ único punto crítico.}$$
$$f(0, 0) = 2 \geq 2 - (x^2 + y^2) = f(x, y), \forall (x, y).$$

Ejemplo 2.- Mínimo relativo

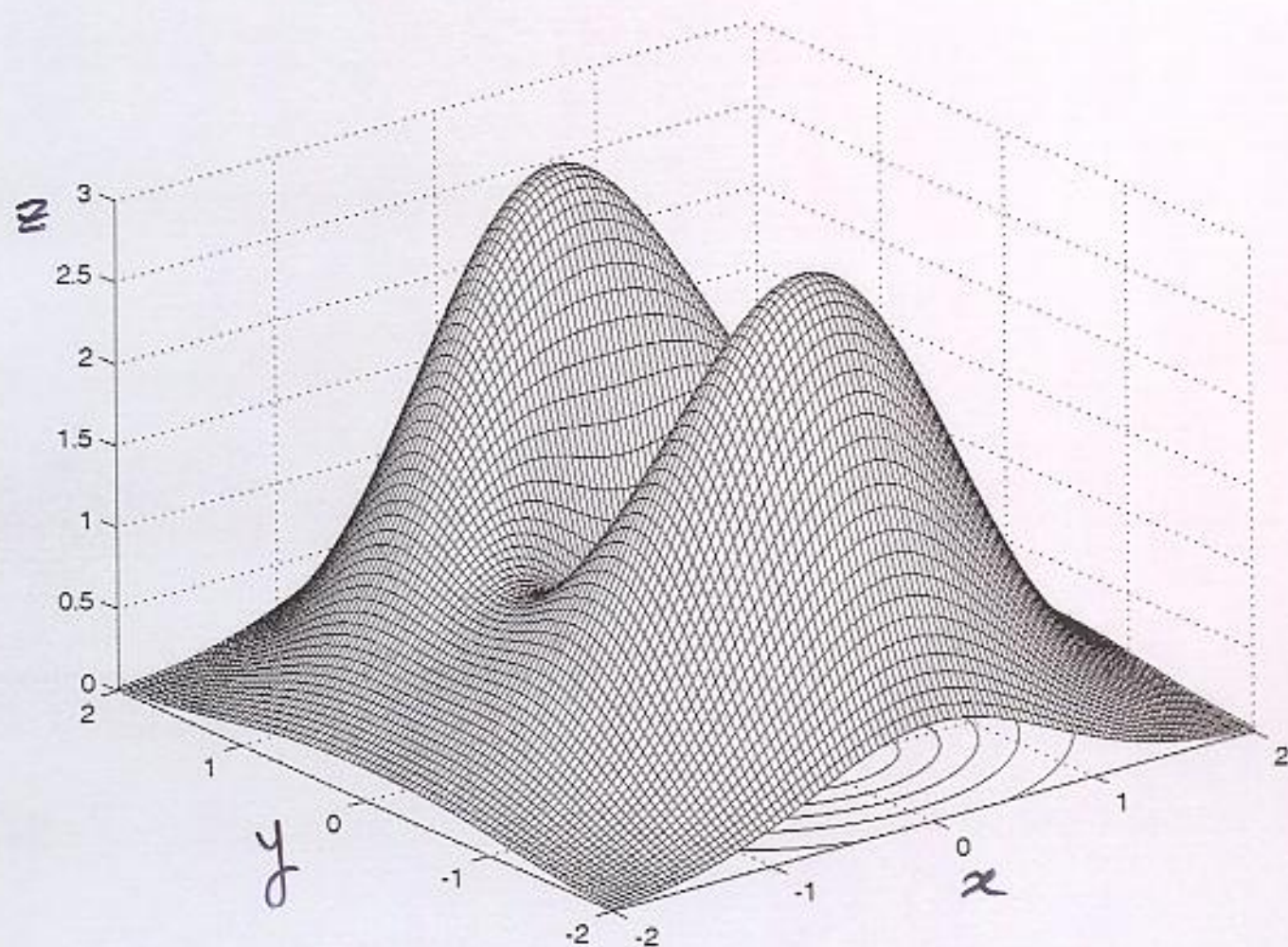
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2; f'_x = 2x, f'_y = 2y \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ único punto crítico.}$$
$$f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y), \forall (x, y).$$

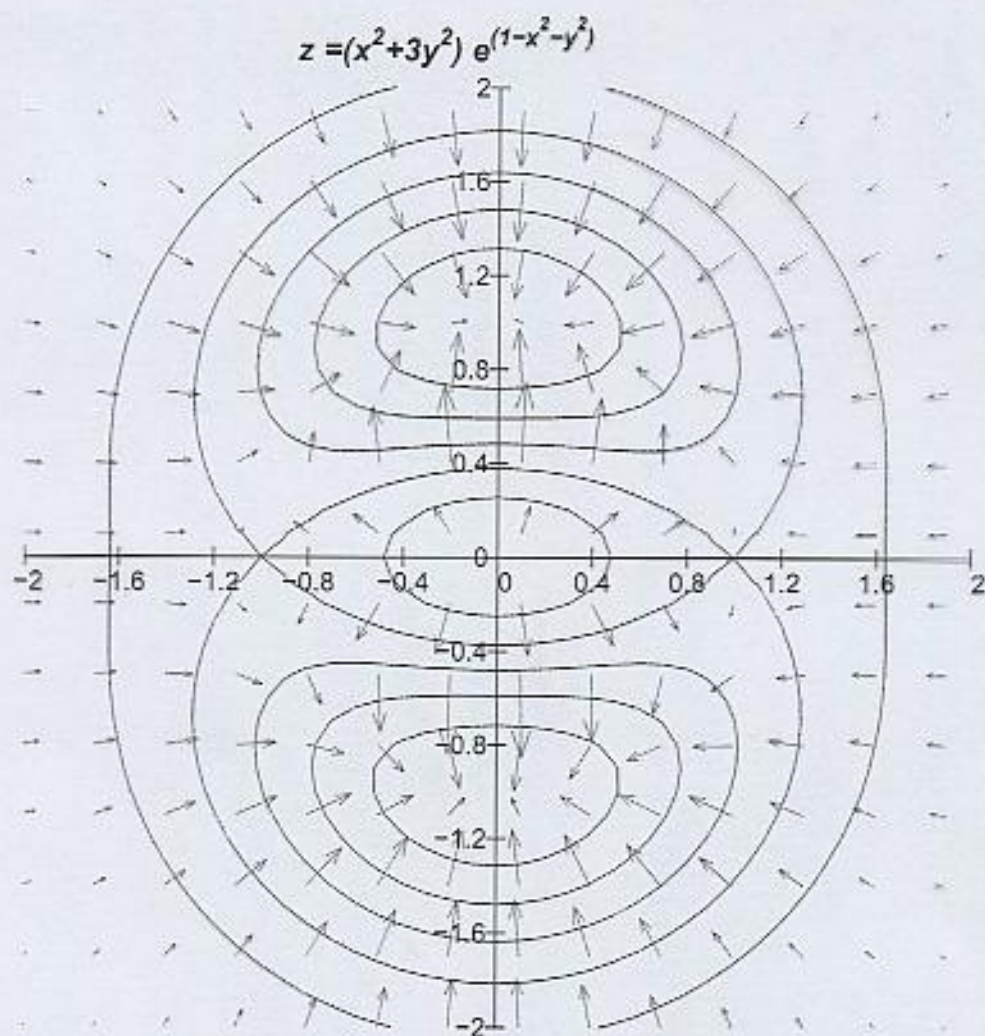
Ejemplo 3.- Punto de ensilladura

$$z = f(x, y) = xy; f'_x = y, f'_y = x \Rightarrow (0, 0) \text{ único punto crítico.}$$

$f(0, 0) = 0$ y es obvio que existen puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tan próximos a $(0, 0)$ como se desee tales que los números x_1 e y_1 tengan signos iguales y los números x_2 e y_2 tengan signos opuestos.

$$z = (x^2 + 3y^2) e^{(1-x^2-y^2)}$$





Gradientes y curvas de nivel

Ejemplo 4.- El ejemplo canónico.

$$z = f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{(1-x^2-y^2)}$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xe^{1-x^2-y^2} - 2x(x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ &= -2xe^{1-x^2-y^2}(-1 + x^2 + 3y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= 6ye^{1-x^2-y^2} - 2y(x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} \\ &= -2ye^{1-x^2-y^2}(-3 + x^2 + 3y^2) \end{aligned}$$

Como $e^t > 0$ para todo $t \Rightarrow f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow -2x(-1 + x^2 + 3y^2) = 0$;

$$f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow -2y(-3 + x^2 + 3y^2) = 0.$$

puntos críticos

$$\begin{cases} -2x(-1 + x^2 + 3y^2) = 0, \\ -2y(-3 + x^2 + 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 + x^2 + 3y^2 = 0, \\ -3 + x^2 + 3y^2 = 0. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1, \\ x^2 + 3y^2 = 3. \end{cases} \quad \text{¡imposible!: incompatible.}$$

Por tanto, si (x, y) es un punto crítico, tiene que ser $x = 0$ ó $y = 0$. Es evidente que $(x, y) = (0, 0)$ es una solución. Si $x = 0, y \neq 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2y(-3 + 3y^2) &= 0, \\ -3 + 3y^2 &= 0, \\ -1 + y^2 &= 0, \\ y^2 = 1 &\Rightarrow y = \pm 1; \Rightarrow (x, y) = (0, \pm 1) \end{aligned}$$

Si $x \neq 0, y = 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2x(-1 + x^2) &= 0, \\ -1 + x^2 &= 0, \\ x^2 = 1 &\Rightarrow x = \pm 1; \Rightarrow (x, y) = (\pm 1, 0). \end{aligned}$$

Por lo que hay 5 puntos críticos:

$(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Por la gráfica de $z = f(x, y)$ y el mapa de las curvas de nivel sabemos que: en $(0, 0)$ hay un mínimo relativo, en $(0, -1)$ y en $(0, 1)$ hay máximos relativos, y en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ hay puntos de ensilladura.

Pero, ¿qué podemos hacer cuando no dispongamos de estas gráficas? Respuesta: Utilizar el criterio dado en el teorema siguiente.

Naturaleza de un punto crítico por medio de la matriz hessiana

Sea $f(\vec{x})$ una función real que admite derivadas parciales segundas continuas $D_{ij}f(\vec{x})$ en un entorno de $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$; se define la matriz hessiana de $f(\vec{x})$ en $\vec{a}$ como sigue

$$H(\vec{a}) := \begin{pmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) & \cdots & D_{1n}f(\vec{a}) \\ D_{21}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) & \cdots & D_{2n}f(\vec{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{n1}f(\vec{a}) & D_{n2}f(\vec{a}) & \cdots & D_{nn}f(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Denotemos por $p_{\vec{a}}(\lambda) := |\lambda I_n - H(\vec{a})|$ el polinomio característico de la matriz $H(\vec{a})$; es un polinomio de grado n en la variable λ . Por ser simétrica la matriz $H(\vec{a})$ todas las raíces de este polinomio son números reales.

Se dice que un número real x es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$

Designamos por $d_1(\vec{a}), d_2(\vec{a}), \dots, d_n(\vec{a})$ los menores principales de la matriz hessiana:

$$d_1(\vec{a}) := D_{11}f(\vec{a}), \quad d_2(\vec{a}) := \begin{vmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) \\ D_{21}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) \end{vmatrix},$$

$$\dots, d_n(\vec{a}) := |H(\vec{a})|.$$

Teorema 2.- (Criterio ó condiciones suficientes) *Supongamos que $\vec{a}$ es un punto crítico de $f(\vec{x})$.*

(a) *Si $d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \dots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un mínimo relativo en $\vec{a}$.*

(b) *Si $(-1)^k d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \dots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un máximo relativo en $\vec{a}$.*

(c) *Si el polinomio $p_{\vec{a}}(\lambda)$ tiene al menos una raíz positiva y una raíz negativa, entonces $f(\vec{x})$ tiene un punto de ensilladura en $\vec{a}$.*

Las derivadas parciales segundas de la función $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{(1-x^2-y^2)}$ del Ejemplo 4 son

$$D_{11}f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{1-x^2-y^2} (1 - 5x^2 - 3y^2 + 2x^4 + 6y^2x^2),$$

$$D_{12}f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xye^{1-x^2-y^2} (-4 + x^2 + 3y^2),$$

$$D_{21}f(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xye^{1-x^2-y^2} (-4 + x^2 + 3y^2),$$

$$D_{22}f(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^{1-x^2-y^2} (3 - 15y^2 - x^2 + 2y^2x^2 + 6y^4).$$

Por lo tanto, la matriz hessiana de $f(x, y)$ en cada uno de los 5 puntos críticos (x_0, y_0)

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 6e \end{pmatrix}, d_1 = 2e > 0, d_2 = 12e^2 > 0,$$

mínimo relativo

$$H(0, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

$$H(1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

En el caso de los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, las hipótesis de los apartados (a) y (b) del Teorema 2 no se cumplen. Probemos con (c); el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 4);$$

por tanto, las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ son $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$; la primera es negativa y la segunda es positiva. En consecuencia, los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son puntos de ensilladura.

Ejemplo 5.- Sea $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$. Como $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = -2z$ se ve que $(0, 0, 0)$ es el único punto crítico. La matriz hessiana $H(x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

para todo (x, y, z) . Por tanto, su polinomio característico es

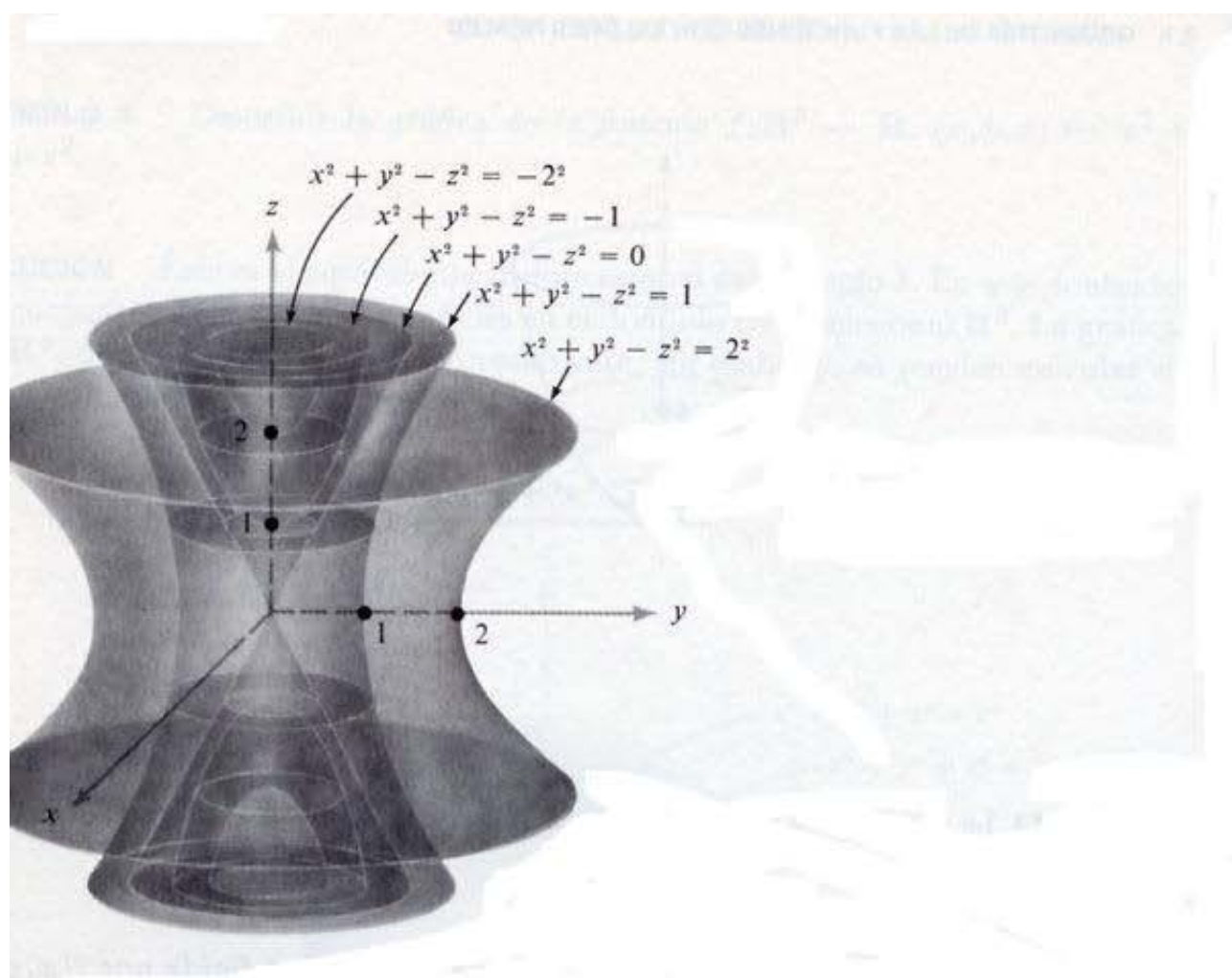
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2);$$

sus raíces son $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = -2$ (simple).

Como tiene al menos una positiva y otra negativa, por Teorema 2, (c), se sigue que $(0, 0, 0)$ es un punto de ensilladura de $f(x, y, z)$.

Una gráfica que contiene algunas superficies de nivel de esta función puede verse en la hoja P-7, que para facilidad del lector incluimos también en la página siguiente.

Obsérvese que la superficie de nivel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es un cono que pasa por $(0, 0, 0)$; que para valores positivos de c la superficie de nivel $x^2 + y^2 - z^2 = c$ consta de una sola hoja y para valores negativos de c cada una de estas superficies está formada por dos hojas situadas en los dos lados del cono.



Ajuste por mínimos cuadrados

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reales distintos y sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ números reales.

Problema.- Hallar los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Es decir, buscar el punto (a, b) que hace mínimo el valor de la función

$$E(a, b) := \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Solución.- $E(a, b) := \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = \\ 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 &+ 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = \\ 2a \sum_{i=1}^n x_i &+ 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2n$$

Puntos críticos

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (3)$$

Sean las medias

$$\bar{x} := (\sum_{i=1}^n x_i)/n, \quad \bar{y} = (\sum_{i=1}^n y_i)/n;$$

es decir, $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de los puntos $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$. La ecuación segunda de (3) se puede reescribir como $a\bar{x} + b = \bar{y}$.

La solución de (3) viene dada por

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

El determinante de la matriz hessiana $H(a, b)$ es igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} \right)^2 &= 2n \left(2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= 4 \left\{ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Desigualdad de Schwarz

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$$

en efecto, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$; como $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$, se sigue que $\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta \leq \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$. Si $\cos^2 \theta < 1$, entonces $\leq$ se puede refinar a $<$.

Tomando $\vec{e} := (1, \dots, 1)$, $\vec{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se deduce que $(\vec{e} \cdot \vec{x})^2 \leq (\vec{e} \cdot \vec{e})(\vec{x} \cdot \vec{x})$. Lo que equivale a $\left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$. Como los $x_1, \dots, x_n$ son distintos se tiene que $\left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i \right)^2 < n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

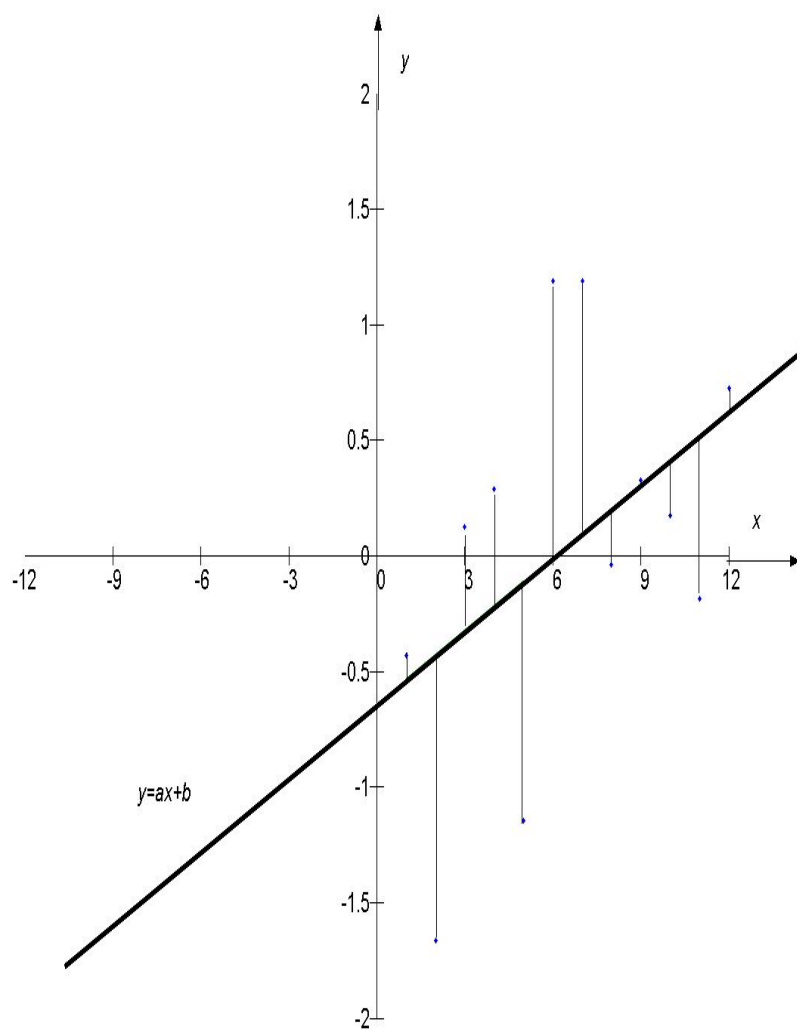
Por lo tanto, el determinante de $H(a, b)$ es positivo; además el elemento de la posición 1,1 de $H(a, b)$ es $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$; por el Teorema 2 (a), la función $E(a, b)$ tiene un mínimo relativo en el punto crítico (a, b) . Como $E(a, b)$ tiende a infinito cuando a y b tienden a infinito; este mínimo relativo es también mínimo absoluto (pues sólo hay un punto crítico).

Ejemplo.- Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos dados por la tabla siguiente.

x_i	y_i
1	-0.4326
2	-1.6656
3	0.1253
4	0.2877
5	-1.1465
6	1.1909
7	1.1892
8	-0.0376
9	0.3273
10	0.1746
11	-0.1867
12	0.7258

Respuesta: $y = 0,1046x - 0,6340$.

1-260



Ajuste polinómico por mínimos cuadrados

Problema.- Hallar el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

que mejor se ajusta a los puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

donde $x_0, x_1, \dots, x_n$ son $n + 1$ números reales distintos,

$(m + 1 \leq n + 1)$. Esto es, encontrar el mínimo de la función

$$E(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) := \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_mx_i^m - y_i)^2.$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{\partial E}{\partial a_i}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0,$$

$$i = 0, \dots, m,$$

se obtienen los puntos críticos.

De hecho, este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de *ecuaciones normales*

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_m a_m = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{m+1} a_m = t_1 \\ \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \cdots + s_{2m} a_m = t_m \end{cases}$$

donde

$$s_k := \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad t_k := \sum_{i=0}^n y_i x_i^k.$$

Este sistema de ecuaciones determina los a_j unívocamente, y los a_j resultantes nos dan el mínimo valor posible de E .

Ejercicios

Ejercicio 31.-

Sean $f(x, y)$ diferenciable, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Definimos $\varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Hallar $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$ en función de las derivadas parciales de $f(x, y)$.

Respuesta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 32.-

El cambio de variables $x = u + v, y = uv^2$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto $u = 1, v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

en el punto $x = 2, y = 1$.

Respuesta.- 8

Ejercicio 34.-

Sabiendo que $\nabla f(x, y, z)$ es paralelo al vector $(1, 2, -1)$ para todo (x, y, z) , demostrar que $f(0, 0, -1) = f(1, -1, -2)$.

Ejercicio 35.-

Sea (x_0, y_0) un punto crítico de una función $f(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto (x_0, y_0) . Sea Δ el determinante de la matriz hessiana de $f(x, y)$ en dicho punto.

Demostrar que si $\Delta < 0$, la función $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en (x_0, y_0) .

Ejercicio 36.-

Sea $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2 . Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Deducir por observación de las curvas de nivel que $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

Ejercicio 37.-

Sea $z = f(x, y) = x^2y^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2 . Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Probar que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 38.-

Para cada una de las funciones siguientes identificar y clasificar los puntos estacionarios:

1. $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2.$

2. $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2.$

3. $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2.$

4. $f(x, y) = (x - y + 1)^2.$

5. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y.$

6. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$

$$7. f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3.$$

$$8. f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y).$$

$$9. f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

10. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$. El seno y el coseno hiperbólicos de t se definen así $\operatorname{sh} t := (e^t - e^{-t})/2$, $\operatorname{ch} t := (e^t + e^{-t})/2$. Es fácil verificar que $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$, $(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$.

$$11. f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$$

$$12. f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}.$$

$$13. f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y).$$

$$14. f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, (x > 0).$$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$

Respuestas.-

1. Mínimo absoluto en $(0, 1)$.
2. Punto de ensilladura en $(0, 1)$.
3. Punto de ensilladura en $(0, 0)$.
4. Mínimo absoluto en cada punto de la recta $y = x + 1$.
5. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.
6. Mínimo absoluto en $(1, 0)$.
7. Punto de ensilladura en $(0, 0)$.

8. Punto de ensilladura en $(0, 6)$ y en $(x, 0)$, para todo x ; mínimo relativo en $(0, y)$, $0 < y < 6$; máximo relativo en $(2, 3)$ y en $(0, y)$ para $y < 0$ e $y > 6$.
9. Punto de ensilladura en $(0, 0)$; mínimo relativo en $(1, 1)$.
10. Puntos de ensilladura en $(n\pi + \pi/2, 0)$, siendo n un entero.
11. Mínimo absoluto en $(0, 0)$; punto de ensilladura en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.
12. Mínimo absoluto en $(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$; máximo absoluto en $(1, 3)$.
13. Máximo absoluto en $(\pi/3, \pi/3)$; mínimo absoluto en $(2\pi/3, 2\pi/3)$; máximo relativo en (π, π) ; mínimo relativo en $(0, 0)$; puntos de ensilladura en $(0, \pi)$ y $(\pi, 0)$.

14. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.

15. Máximo absoluto en cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; mínimo absoluto en $(0, 0)$.

Ejercicio 39.-

Ajuste por mínimos cuadrados. Dados los puntos $(x_0, y_0) = (3, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, -3)$; $(x_2, y_2) = (5, 1)$ y $(x_3, y_3) = (7, 3)$.

1. Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos.
2. Hallar el polinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos; en este caso, se debe buscar el mínimo de la función $E(a, b, c)$ de las variables a, b, c , dada por

$$E(a, b, c) := \sum_{i=0}^3 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Respuestas.-

1. $y = 0,3500x - 0,6500.$

2. $a = 0,4375, b = -3,1500, c = 4,1625.$