

Cálculo y Álgebra

Examen alternativo
29 de mayo de 2012

Ejercicio 1.- Demostrar que la función

$$f(x, y, z) := \frac{7}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3$$

satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Ejercicio 2.- Hallar la recta tangente a la curva

$$xy + 3y^2 = 4$$

en el punto $(1, 1)$.

Ejercicio 3.- Sea la función

$$f(x, y) := 3x^4 - 4x^2y + y^2$$

Hallar el punto crítico de $f(x, y)$. Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = mx$ la función $g_m(x) := f(x, mx)$ tiene un mínimo en $x = 0$, pero que la función $f(x, y)$ no tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$. Hacer un dibujo indicando la región de puntos (x, y) en los que $f(x, y) > 0$ y la región en la que $f(x, y) < 0$.

Ejercicio 4.- Sea la función $f(x, y)$ definida como sigue:

$$f(x, y) := \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, las derivadas parciales siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Nota.- Todos los ejercicios puntúan lo mismo: 2,5.

Tiempo: 4 horas.