Apéndice sobre ecuaciones diferenciales lineales

Juan-Miguel Gracia

10 de febrero de 2008

Índice

1. Determinante wronskiano

En toda esta sección la letra I denotará un intervalo cualquiera de la recta real $\mathbb{R}$. Es decir, el intervalo I puede ser de cualquiera de los nueve tipos

$$(a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b) \text{ con } a<b,$$
$$(a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (-\infty,\infty)=\mathbb{R}.$$

Si $f(t)$ es una función real definida en I y el intervalo I contuviera a uno de sus extremos finitos a o b, las derivadas $f^k(a)$ o $f^k(b)$ deben entenderse como derivadas laterales: $f^k(a) := f^k(a^+)$ (derivada por la derecha), o $f^k(b) := f^k(b^-)$ (derivada por la izquierda).

Definición 1.1. Sean $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I de la recta real. Diremos que $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ son **linealmente independientes** en I si la relación: Para todo $t \in I$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ son **linealmente dependientes** en I.

Ejemplo 1.1. Las funciones $f_1(t) := t+2, f_2(t) := t-2$ son linealmente independientes en $(-\infty,\infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que para todo $t \in (-\infty,\infty)$

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría que

$$\forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,$$
$$\forall t, \quad (\alpha_1+\alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Por tanto, $\alpha_1+\alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1-\alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

resultaría $2\alpha_1 = 0$; lo que implicaría $\alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda se deduciría que $\alpha_2 = 0$. Por consiguiente las funciones $t+2$ y $t-2$ son linealmente independientes en $(-\infty,\infty)$.

Ejemplo 1.2. Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; lo cual es imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

1.1. Wronskiano de $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$

Definición 1.2.

$$W(t) = W[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] := \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$W[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] := \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.3.

$$W[t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}] = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(1+2t) \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 4\mathrm{e}^{2t}(1+t) \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{2t}\begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 2 & 1+2t \\ 0 & 4 & 1+t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4t}\begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2t \\ 0 & 4 & 1+t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4t}\left[t\begin{vmatrix} 2 & 2t \\ 4 & 1+t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1+t \end{vmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{4t}\left[2t\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 2 & 1+t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1+t \end{vmatrix}\right] = \mathrm{e}^{4t}\left[2t(1+t-4t)-(1+t)\right]$$

$$= \mathrm{e}^{4t}[-6t^2+3t-1]$$

y como la ecuación $-6t^2+3t-1=0$ no tiene raíces reales, se sigue que para todo t se tiene que $W[t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}] \neq 0$.

Teorema 1. *Sean $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ funciones definidas y derivables hasta $n-1$ veces en un intervalo I. Si existe un $t_0 \in I$ tal que*

$$W[f_1(t), \ldots, f_n(t)](t_0) \neq 0,$$

entonces $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son linealmente independientes en I.

Demostración. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \forall t \in I, \tag{6}$$

derivando sucesivas veces esta igualdad,

$$\alpha_1 f_1'(t) + \cdots + \alpha_n f_n'(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n(t_0) = 0, \\ \alpha_1 f_1'(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n'(t_0) = 0, \\ \qquad\vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t_0) = 0,, \end{cases} \tag{7}$$

Como (7) es un sistema ecuaciones lineales de Cramer en las incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, se deduce que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\square$

1.2. Derivada de un determinante de funciones

Sea

$$D(t) := \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}, \text{ para } t \in I.$$

Entonces,

$$D'(t) = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

Lo cual es fácil de probar.

1.3. Fórmula de Abel-Liouville para el wronskiano

Teorema 2 (Abel-Liouville)**.** *Sea*

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{8}$$

una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, donde $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son funciones reales continuas en un intervalo I. Sean $x_1(t), x_2(t)$ dos soluciones de (8) *y sea*

$$W(t) = W[x_1(t), x_2(t)]$$

su wronskiano. Entonces,

$$\forall t \in I, \qquad W(t) = C\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Demostración. Como

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix},$$

derivando resulta

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix}$$

$$= x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t);$$

pero $x_i''(t) = -a_1(t)x_i'(t) - a_2(t)x_i(t) = 0$, para $i = 1, 2$; por tanto,

$$\begin{aligned}
W'(t) &= x_1(t)\left[-a_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_2(t)\right] \\
&\quad - \left[-a_1(t)x_1'(t) - a_2(t)x_1(t)\right] x_2(t) \\
&= -a_1(t)x_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\
&\quad + a_1(t)x_1'(t)x_2(t) + a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\
&= -a_1(t)\left[x_1(t)x_2(t) - x_1'(t)x_2(t)\right] \\
&= -a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t).
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\forall t \in I, \qquad W'(t) = -a_1(t)W(t); \tag{9}$$

es decir, que $W(t)$ satisface (9), que es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden; en consecuencia existe una constante C tal que

$$W(t) = C\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t}.$$

□

Veremos enseguida otra formulación del Teorema de Abel-Liouville. Para ello necesitamos recordar el teorema siguiente.

Teorema 3 (Teorema fundamental del cálculo infinitesimal)**.** *Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I, sea x_0 un punto fijo de I, y definamos la función*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ para cada } x \in I.$$

Entonces $F(x)$ es derivable en I y su derivada viene dada por

$$F'(x) = f(x).$$

Ejemplo 1.4. Sea

$$F(x) := \int_{1}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Entonces por ser e^{-x^2} continua en todo $\mathbb{R}$ y por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, para todo x real existe la derivada $F'(x)$ y

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

También necesitamos otra expresión para la solución del problema de condición inicial para una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

$$(P)\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $a(t)$ es una función continua en $I, t_0 \in I$, y x_0 es un número real cualquiera. La solución de (P) viene dada por

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

En efecto, por definición $\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s := 0$. Por tanto,

$$x(t_0) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s} = x_0 \mathrm{e}^0 = x_0 \cdot 1 = x_0;$$

así pues, $x(t)$ satisface la condición inicial. Además, por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, para todo $t \in I$,

$$x'(t) = x_0 a(t) \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = a(t)x(t).$$

Resumiendo, sin usar x_0, cualquier solución de $x' = a(t)x$ viene dada por

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Como $W(t)$ satisface $W'(t) = -a_1(t)W(t)$, se sigue que para cada $t_0 \in I$,

$$W(t) = W(t_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s}, \qquad \forall t \in I. \tag{10}$$

1.4. Wronskiano idénticamente nulo de funciones linealmente independientes

Ejemplo 1.5. Veamos que para todo t real, $W[t^3, |t|^3] = 0$. En efecto, si $t \geq 0$, se sigue que $|t| = t$; por tanto $|t|^3 = t^3$, y

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si $t < 0$, entonces $|t| = -t$; de donde, $|t|^3 = (-t)^3 = -(t^3)$; por lo cual,

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia para todo $t \in \mathbb{R}$, $W(t) = 0$. Pero, las funciones t^3 y $|t|^3$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$, ya que si α_1, α_2 son constantes reales tales que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_1 t^3 + \alpha_2 |t|^3 = 0,$$

dando a t los valores particulares $t = 1$ y $t = -1$, deducimos

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones, $2\alpha_2 = 0$; lo que implica $\alpha_2 = 0$, y, por ende, $\alpha_1 = 0$.

En consecuencia, a la vista del Teorema 1 podemos decir que la no anulación del wronskiano en un punto t_0 es condición suficiente para la independencia lineal de las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, mas no es condición necesaria. Esto es, puede haber funciones linealmente independientes cuyo wronskiano se anule en todos los puntos del intervalo.

Sin embargo, esta cuestión cambia drásticamente si $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea

$$x^{(p)} + a_1(t)x^{(p-1)} + \cdots + a_{p-1}(t)x' + a_p(t)x = 0$$

con $n \leq p$; siendo $a_1(t), \ldots, a_p(t)$ continuas en I.

1.5. Teorema de existencia y unicidad de soluciones

2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Utilizaremos notación matricial y unas pocas definiciones sobre funciones vectoriales de una variable real. Si $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n funciones reales de la variable real t, la función vectorial

$$\boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

designa un vector columna (o matriz columna) de n componentes para cada valor real de t. *Por definición*, decimos que $\boldsymbol{x}(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

son derivables en t. En cuyo caso, definimos

$$\boldsymbol{x}'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

El vector $\boldsymbol{x}'(t)$ es la derivada de $\boldsymbol{x}$ en t.
Ejemplo.- Si $x_1(t) = t^2,\ x_2(t) = \cos t,\ x_3(t) = \exp(t^2)$ entonces

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \exp(t^2) \end{pmatrix}$$

es derivable y su derivada es igual a

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2\,t \\ -\operatorname{sen} t \\ 2\,t\exp(t^2) \end{pmatrix}.$$

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t). \end{array} \right. \tag{11}$$

Aquí a_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), \dots,$ $x_n(t)$ son las funciones incógnitas. Denotando por $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ la matriz cuadrada $n\times n$ formada por los coeficientes, podemos escribir el sistema (11) en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

El sistema se escribe de forma resumida así:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t). \tag{13}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo de coeficientes constantes. Si no hay dudas, (13) lo podemos escribir abreviadamente omitiendo la t:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{14}$$

Debe quedar claro que $\boldsymbol{x}$ depende de t, pero $\boldsymbol{A}$ no depende: $\boldsymbol{A}$ es constante. Resolveremos el sistema (13) bajo ciertas restricciones, muy generales. En primer lugar, tratamos de ver si existen soluciones de la forma

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\boldsymbol{c}}$$

donde λ_0 es un *número* y $\boldsymbol{c}$ un *vector columna* distinto de

$$0 = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ ceros.}$$

Suponemos que el vector

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{es constante.}$$

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\boldsymbol{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{c} \tag{15}$$

Por otro lado,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{c} = e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \tag{16}$$

Como $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$, de (15) y (16) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \boldsymbol{c} = e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \tag{17}$$

Dividiendo ambos miembros de (17) por $e^{\lambda_0\, t}$ resulta

$$\lambda_0\, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$$

o bien

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \lambda_0\, \boldsymbol{c}} \tag{18}$$

Así pues, (18) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{c}$ sea una solución de (11). Es fácil ver que (18) es también una condición suficiente. Resumiendo:

Proposición 1. *La función vectorial* $e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{c}$ *es una solución del sistema diferencial lineal* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *si y sólo si el número* λ_0 *y el vector columna* $\boldsymbol{c}$ *satisfacen la ecuación algebraica*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \lambda_0\, \boldsymbol{c}.$$

Nota.- La función nula $\boldsymbol{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (11), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0\, t}\boldsymbol{c}$ tratamos de encontrar un vector $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ tales que $\boldsymbol{Ac} = \lambda_0\, \boldsymbol{c}$. Esta ecuación es equivalente a $\boldsymbol{Ac} = \lambda_0\, \boldsymbol{Ic}$, siendo

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz unidad (o identidad) de orden n. La ecuación

$$\boldsymbol{Ac} = \lambda_0\, \boldsymbol{Ic}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

Si $\boldsymbol{c}$ ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$$

tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| \tag{19}$$

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0. \tag{20}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

en las incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Una solución $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ de (21) con no todas las componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden n se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de $\boldsymbol{A}$ si existe un vector columna n-dimensional $\boldsymbol{c}$ no nulo tal que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \lambda_0\, \boldsymbol{c}.$$

El vector $\boldsymbol{c}$ se llama *vector propio* de $\boldsymbol{A}$ asociado al valor propio λ_0.

Otras terminologías equivalentes

λ_0	$\boldsymbol{c}$
valor propio	vector propio
autovalor	autovector
valor característico	vector característico
raíz latente	vector latente
eigenvalor	eigenvector

Pero raíz (o vector) latente no es correcto en castellano, pues viene del inglés "latent root", donde "latent" significa *oculto*. El prefijo "eigen" significa *propio* en alemán, y los términos "eigenvalor" y "eigenvector" son innecesarios; vienen del inglés donde se llaman "eigenvalue" y "eigenvector", respectivamente.

Ejemplo.- Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Por lo visto anteriormente es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{23}$$

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (23):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$, resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos este sistema en la forma

$$\begin{cases} c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\begin{cases} c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al anterior (i.e. tiene las mismas soluciones). Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\begin{cases} c_2 = 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 = -c_3 \end{cases}$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\begin{cases} c_2 = 4 \\ -3c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \implies \boxed{c_2 = 4}\,;$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \implies \boxed{c_1 = -1}$$

Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4\, e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema diferencial lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hemos terminado el ejemplo.

Sea ahora un $\boldsymbol{x}^0$ un vector columna dado de n componentes:

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{x}^0$ se lee "$\boldsymbol{x}$ super cero". Consideremos el problema de hallar la solución $\boldsymbol{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0$:

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \end{array} \right.$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0 t}\boldsymbol{c}$.

Hipótesis Suplementaria: Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, $\boldsymbol{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \ldots, \boldsymbol{c}^n$ vectores propios de $\boldsymbol{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 4. *Si los n valores propios de $\boldsymbol{A}$ son distintos, entonces los vectores propios $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \ldots, \mathbf{c}^n$ son linealmente independientes.*

Sin demostración.

2.1. Solución del problema (P_0)

Expresemos $\boldsymbol{x}^0$ como combinación lineal de los vectores propios $\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \ldots, \boldsymbol{c}^n$:

$$\boldsymbol{x}^0 = \alpha_1 \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{c}^n.$$

Tal combinación existe y es única pues $\{\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \ldots, \boldsymbol{c}^n\}$ es una base del espacio formado por todos los vectores columna de números. La solución de (P_0) viene dada por la fórmula

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \boldsymbol{c}^n.}$$

Demostración: Derivemos,

$$\boldsymbol{x}'(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \lambda_1 \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \lambda_2 \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \lambda_n \boldsymbol{c}^n;$$

pero $\lambda_i \boldsymbol{c}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^n \\ &= \boldsymbol{A}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \boldsymbol{c}^n\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t). \end{aligned}$$

Además,

$$\boldsymbol{x}(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot 0} \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot 0} \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n \cdot 0} \boldsymbol{c}^n = \alpha_1 \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{c}^n = \boldsymbol{x}^0.$$

$\square$

Ejemplo: Resolver el problema de condición inicial

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución: La matriz $\boldsymbol{A}$ es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de $\boldsymbol{A}$: $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.

Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_3 = -2 \text{ es una raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1 \text{ es una raíz.}$$

Como las *tres* raíces del polinomio característico de $\boldsymbol{A}$, $|\lambda\, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$, son *simples* (y $\boldsymbol{A}$ es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*. Por lo tanto, podemos aplicar el método de resolución dado a este sistema diferencial lineal.

Como en el ejemplo antes mencionado, calculamos un vector propio $\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \boldsymbol{c}^3$ asociado a cada uno de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente:

$$\boldsymbol{c}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\boldsymbol{x}^0$ como combinación lineal de $\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \boldsymbol{c}^3$:

$$\boldsymbol{x}^0 = \alpha_1 \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{c}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{c}^3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

cuya solución es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 0, -4/3)$. En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{t}}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{t} + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 4(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \mathrm{e}^{t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ (e^{7t} + e^{-5t})/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{4t} + 3e^{-t} \\ 3e^{4t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& x_1(t) - 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) &=& \qquad\;\; - \;\; x_2(t) \\ x_3'(t) &=& \qquad\;\; - \;\; x_2(t) - 2x_3(t) \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x_1(0) = -2 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3. Recurrencias lineales

Las recurrencias lineales son ecuaciones en las que la incógnita es una sucesión numérica $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ que aparece linealmente. Por ejemplo, la recurrencia $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, es lineal. Si buscamos una solución concreta necesitamos prescribir unas condiciones iniciales: los valores de $x_0 = c_0$ y $x_1 = c_1$. Pues $x_2 = x_1+x_0 = c_0+c_1$, y de aquí, $x_3 = x_2+x_1 = (c_0+c_1)+c_1$, etc. Si $x_0 = 1, x_1 = 1$, la solución es la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k? Busquemos un número λ tal que λ^k sea una solución de $x_{k+2} = x_{k+1}+x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

por tanto, si resolvemos la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ obtenemos dos valores λ_1, λ_2 que valdrían para nuestro propósito. Por ende,

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así pues,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hemos conseguido dos soluciones $(\lambda_1^k)_{k=0}^{\infty}, (\lambda_2^k)_{k=0}^{\infty}$ de la recurrencia

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se puede demostrar que la solución general de esta recurrencia viene dada por una combinación lineal de estas dos sucesiones:

$$x_k = \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_2^k = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Con ayuda de las condiciones iniciales podemos determinar los escalares α_1 y α_2 que corresponden a una solución particular. Así pues, en el ejemplo de la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$ implica que

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sistema cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2};$$

Por consiguiente, la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_0 = 1, x_1 = 1, \end{cases}$$

viene dada por

$$x_k = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(-\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Hay recurrencias no lineales, por ejemplo

$$x_{k+1} = x_k + (2k-1)x_k^2 + \operatorname{sen} k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Otra terminología.- Las recurrencias son llamadas también *ecuaciones en diferencias finitas*, por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias.

4. Sistemas de recurrencias lineales

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$ y consideremos la recurrencia

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

donde cada $\boldsymbol{y}^k$ es un vector columna $n \times 1$. Las soluciones de (24) son sucesiones de vectores $(\boldsymbol{y}^k)_{k=0}^{\infty}$ y el k en $\boldsymbol{y}^k$ es un superíndice y no es un exponente (¡$\boldsymbol{y}^k \neq \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}\cdots\boldsymbol{y}$!)

En función del vector inicial $\boldsymbol{y}^0$, tenemos que

$$\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^0,\ \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{y}^0, \ldots$$

y en general

$$\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{y}^0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para que esta solución sea satisfactoria debemos conocer la potencia k-ésima de la matriz $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}^k := \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A} \quad (k \text{ factores});$$

en función de k, tarea nada fácil. Se podría hallar $\boldsymbol{A}^k$ mediante la diagonalización de la matriz $\boldsymbol{A}$, o mediante su forma canónica de Jordan. Mas visto como es resuelto el sistema (24) en alguna asignatura de Ciencias Ambientales, preferimos usar el método que sigue.

Supongamos que la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sean $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\boldsymbol{y}^0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\boldsymbol{y}^0 = \alpha_1\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{c}^n.$$

A continuación, vemos que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^0 &= \alpha_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^n \\ &= \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\boldsymbol{c}^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^1 &= \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^n \\ &= \alpha_1\lambda_1^2\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\lambda_2^2\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^2\boldsymbol{c}^n.\end{aligned}$$

Es fácil ver que continuando este proceso se obtiene la solución

$$\boldsymbol{y}^k = \alpha_1\lambda_1^k\boldsymbol{c}^1 + \alpha_2\lambda_2^k\boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k\boldsymbol{c}^n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

4.1. Comportamiento asintótico de las soluciones

Lema 1. *Si z_0 es un número complejo tal que $|z_0| < 1$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} z_0^k = 0.$$

En este lema z_0^k es una potencia $z_0^k := z_0\, z_0 \cdots z_0$, ($k$ factores).

Supongamos que los valores propios de $\boldsymbol{A}$, además de ser simples, satisfacen que $\lambda_1 > 0$ y la condición de dominación:

$$|\lambda_2| < \lambda_1, |\lambda_3| < \lambda_1, \ldots, |\lambda_n| < \lambda_1. \tag{26}$$

Por (25),

$$\frac{\boldsymbol{y}^k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 \boldsymbol{c}^1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{c}^2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{c}^n. \tag{27}$$

Por la hipótesis de dominación y el Lema 1, se tiene que $\forall i = 2, \ldots, n$,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0.$$

En consecuencia, existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}^k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 \boldsymbol{c}^1. \tag{28}$$

Detallemos las componentes del vector propio $\boldsymbol{c}^1$ y del vector $\boldsymbol{y}^k$:

$$\boldsymbol{c}^1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$$

Si para algún $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $c_{i1} = 0$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} y_{ik} = 0.$$

Llamando

$$\boldsymbol{y}^{k+1} = \begin{pmatrix} y_{1,k+1} \\ y_{2,k+1} \\ \vdots \\ y_{n,k+1} \end{pmatrix},$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $c_{j1} \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

En efecto, si k es suficientemente grande,

$$y_{jk} \simeq \alpha_1 \lambda_1^k c_{j1}, \quad y_{j,k+1} \simeq \alpha_1 \lambda_1^{k+1} c_{j1};$$

así pues,

$$\frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} \simeq \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1} c_{j1}}{\alpha_1 \lambda_1^k c_{j1}} = \lambda_1.$$

o bien

$$y_{j,k+1} \simeq \lambda_1 y_{jk}$$

Denotando por $\|\boldsymbol{y}\|_1 := |y_1| + \cdots + |y_n|$ la norma sub uno de un vector $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ donde $^{\mathrm{T}}$ designa vector transpuesto, se tiene que

$$\|\boldsymbol{y}^{k+1}\|_1 \simeq \lambda_1 \|\boldsymbol{y}^k\|_1.$$

Si cada y_{jk} denotase el número de individuos en la clase de edad j en la etapa k-ésima se tendría que la población total $T(k) := \|\boldsymbol{y}^k\|_1$ crecería (si $\lambda_1 > 1$), disminuiría (si $\lambda_1 < 1$), respectivamente, en la proporción λ_1 al pasar a la etapa $(k+1)$-ésima.

Los sistemas de recurrencias lineales son llamados también **sistemas de ecuaciones en diferencias finitas** por analogía con los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias: en vez de $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ se considera $\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^k$, y la función vectorial incógnita $\boldsymbol{x}(t)$ que depende de la variable continua t, es reemplazada en esta analogía por la sucesión vectorial incógnita $(\boldsymbol{y}^k)_{k=0}^{\infty}$ que depende de la variable discreta k.