Recurrencias lineales

Juan-Miguel Gracia

10 de febrero de 2008

Las recurrencias lineales son ecuaciones en las que la incógnita es una sucesión numérica $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ que aparece linealmente. Por ejemplo, la recurrencia $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, es lineal. Si buscamos una solución concreta necesitamos prescribir unas condiciones iniciales: los valores de $x_0 = c_0$ y $x_1 = c_1$. Pues $x_2 = x_1 + x_0 = c_0 + c_1$, y de aquí, $x_3 = x_2 + x_1 = (c_0 + c_1) + c_1$, etc. Si $x_0 = 1, x_1 = 1$, la solución es la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Las recurrencias lineales son ecuaciones en las que la incógnita es una sucesión numérica $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ que aparece linealmente. Por ejemplo, la recurrencia $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, es lineal. Si buscamos una solución concreta necesitamos prescribir unas condiciones iniciales: los valores de $x_0 = c_0$ y $x_1 = c_1$. Pues $x_2 = x_1 + x_0 = c_0 + c_1$, y de aquí, $x_3 = x_2 + x_1 = (c_0 + c_1) + c_1$, etc. Si $x_0 = 1, x_1 = 1$, la solución es la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Las recurrencias lineales son ecuaciones en las que la incógnita es una sucesión numérica $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ que aparece linealmente. Por ejemplo, la recurrencia $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, es lineal. Si buscamos una solución concreta necesitamos prescribir unas condiciones iniciales: los valores de $x_0 = c_0$ y $x_1 = c_1$. Pues $x_2 = x_1 + x_0 = c_0 + c_1$, y de aquí, $x_3 = x_2 + x_1 = (c_0 + c_1) + c_1$, etc. Si $x_0 = 1, x_1 = 1$, la solución es la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: Cala, o Lirio de agua

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: Flor de Pascua

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: trillium

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: columbine

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: sanguinaria

1,2,3,5,8,13,21,34,...

Figura: Margarita dorada

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: Margarita

1,2,3,5,8,13,21,34,. . .

Figura: Margaritas

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k?
Busquemos un número λ t.q. λ^k sea una solución de $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k?
Busquemos un número λ t.q. λ^k sea una solución de
$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k?
Busquemos un número λ t.q. λ^k sea una solución de
$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k?
Busquemos un número λ t.q. λ^k sea una solución de
$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

Pero ¿cuál la expresión del término general x_k en función de k?
Busquemos un número λ t.q. λ^k sea una solución de
$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ Se deberá cumplir que

$$\lambda^{k+2} = \lambda^{k+1} + \lambda^k,$$

lo que equivale a

$$\lambda^{k+2} - \lambda^{k+1} - \lambda^k = 0;$$

sacando factor común λ^k resulta

$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0;$$

por tanto, si resolvemos la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ obtenemos dos valores λ_1, λ_2 que valdrían para nuestro propósito.

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así pues,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

por tanto, si resolvemos la ecuación $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ obtenemos dos valores λ_1, λ_2 que valdrían para nuestro propósito.

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así pues,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hemos conseguido dos soluciones $(\lambda_1^k)_{k=0}^{\infty}, (\lambda_2^k)_{k=0}^{\infty}$ de la recurrencia

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se puede demostrar que la solución general de esta recurrencia viene dada por una combinación lineal de estas dos sucesiones:

$$x_k = \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_2^k = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Hemos conseguido dos soluciones $(\lambda_1^k)_{k=0}^{\infty}, (\lambda_2^k)_{k=0}^{\infty}$ de la recurrencia

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se puede demostrar que la solución general de esta recurrencia viene dada por una combinación lineal de estas dos sucesiones:

$$x_k = \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_2^k = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Con ayuda de las condiciones iniciales podemos determinar los escalares α_1 y α_2 que corresponden a una solución particular.

Así pues, en el ejemplo de la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$ implica que

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sistema cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2};$$

Con ayuda de las condiciones iniciales podemos determinar los escalares α_1 y α_2 que corresponden a una solución particular.
Así pues, en el ejemplo de la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$ implica que

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sistema cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2};$$

Con ayuda de las condiciones iniciales podemos determinar los escalares α_1 y α_2 que corresponden a una solución particular.
Así pues, en el ejemplo de la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$ implica que

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sistema cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2};$$

Con ayuda de las condiciones iniciales podemos determinar los escalares α_1 y α_2 que corresponden a una solución particular.
Así pues, en el ejemplo de la sucesión de Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$ implica que

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ x_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sistema cuya solución es

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2};$$

Por consiguiente, la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 = 1, x_1 = 1, \end{cases}$$

viene dada por

$$x_k = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(-\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, k = 0, 1, \dots$$

Por consiguiente, la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_{k+2} = x_{k+1} + x_k, & k = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_0 = 1, x_1 = 1, \end{cases}$$

viene dada por

$$x_k = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(-\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, k = 0, 1, \ldots$$

Hay recurrencias no lineales, por ejemplo

$$x_{k+1} = x_k + (2k-1)x_k^2 + \operatorname{sen} k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Otra terminología.- Las recurrencias son llamadas también *ecuaciones en diferencias finitas*, por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Hay recurrencias no lineales, por ejemplo

$$x_{k+1} = x_k + (2k-1)x_k^2 + \operatorname{sen} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Otra terminología.- Las recurrencias son llamadas también *ecuaciones en diferencias finitas*, por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y consideremos la recurrencia

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

donde cada $\mathbf{y}_k$ es un vector columna $n \times 1$. Las soluciones de (25) son sucesiones de vectores $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$. En función del vector inicial $\mathbf{y}_0$, tenemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0, \ \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_0, \ldots$$

y en general

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{y}_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y consideremos la recurrencia

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

donde cada $\mathbf{y}_k$ es un vector columna $n \times 1$. Las soluciones de (25) son sucesiones de vectores $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$. En función del vector inicial $\mathbf{y}_0$, tenemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0, \; \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_0, \ldots$$

y en general

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{y}_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y consideremos la recurrencia

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

donde cada $\mathbf{y}_k$ es un vector columna $n \times 1$. Las soluciones de (25) son sucesiones de vectores $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$. En función del vector inicial $\mathbf{y}_0$, tenemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_0, \ldots$$

y en general

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{y}_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ y consideremos la recurrencia

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

donde cada $\mathbf{y}_k$ es un vector columna $n \times 1$. Las soluciones de (25) son sucesiones de vectores $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$. En función del vector inicial $\mathbf{y}_0$, tenemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0, \ \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_0, \ldots$$

y en general

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{y}_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para que esta solución sea satisfactoria debemos conocer la potencia k-ésima de la matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^k := \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad (k \text{ factores});$$

en función de k, tarea nada fácil. Se podría hallar $\mathbf{A}^k$ mediante la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$, o mediante su forma canónica de Jordan. Mas visto como es resuelto el sistema (25) en alguna asignatura de Ciencias Ambientales, preferimos usar el método que sigue.

Para que esta solución sea satisfactoria debemos conocer la potencia k-ésima de la matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^k := \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad (k \text{ factores});$$

en función de k, tarea nada fácil. Se podría hallar $\mathbf{A}^k$ mediante la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$, o mediante su forma canónica de Jordan. Mas visto como es resuelto el sistema (25) en alguna asignatura de Ciencias Ambientales, preferimos usar el método que sigue.

Para que esta solución sea satisfactoria debemos conocer la potencia k-ésima de la matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^k := \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad (k \text{ factores});$$

en función de k, tarea nada fácil. Se podría hallar $\mathbf{A}^k$ mediante la diagonalización de la matriz $\mathbf{A}$, o mediante su forma canónica de Jordan. Mas visto como es resuelto el sistema (25) en alguna asignatura de Ciencias Ambientales, preferimos usar el método que sigue.

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{c}_n.$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$
$$= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{c}_n.$$

Supongamos que la matriz A tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{c}_n.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{c}_n. \end{aligned}$$

Supongamos que la matriz A tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{c}_n.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{c}_n. \end{aligned}$$

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{c}_n.$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{c}_n.$$

Supongamos que la matriz A tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{c}_n.$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{c}_n$$
$$= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{c}_n.$$

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos. Esto es, la matriz $\mathbf{A}$ tiene simples sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ sus vectores propios asociados, respectivamente. Empezaremos expresando el vector inicial $\mathbf{y}_0$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{c}_n.$$

A continuación, vemos que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{A}\mathbf{c}_n$$

$$= \alpha_1\lambda_1\mathbf{c}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{c}_n.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \alpha_1\lambda_1^2\mathbf{c}_1 + \alpha_2\lambda_2^2\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^2\mathbf{c}_n.\end{aligned}$$

Es fácil ver que continuando este proceso se obtiene la solución

$$\mathbf{y}_k = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{c}_n,\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (26)$$

Lema 1

Si z_0 es un número complejo t.q. $|z_0| < 1$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} z_0^k = 0.$$

En este lema z_0^k es una potencia $z_0^k := z_0\, z_0 \cdots z_0$, ($k$ factores).

Ejemplo 1: si $z_0 = 0{,}99$

k	z_0^k
1	0.99
2	0.9801
3	0.9703
4	0.9606
5	0.9510
6	0.9415
7	0.9321
8	0.9227
9	0.9135
10	0.9044
11	0.8953

Ejemplo 1: si $z_0 = 0{,}99$

k	z_0^k
1	0.99
2	0.9801
3	0.9703
4	0.9606
5	0.9510
6	0.9415
7	0.9321
8	0.9227
9	0.9135
10	0.9044
11	0.8953

Ejemplo 2: si $z_0 = 0{,}45 - 0{,}60\mathrm{i}, \Rightarrow |z_0| = 0{,}75$

k	z_0^k
1	0.4500 - 0.6000i
2	-0.1575 - 0.5400i
3	-0.3949 - 0.1485i
4	-0.2668 + 0.1701i
5	-0.0180 + 0.2366i
6	0.1339 + 0.1173i
7	0.1306 - 0.0275i
8	0.0422 - 0.0908i
9	-0.0354 - 0.0662i
10	-0.0557 - 0.0085i
11	-0.0302 + 0.0296i
12	0.0042 + 0.0314i
13	0.0207 + 0.0116i
14	0.0163 - 0.0072i
15	0.0030 - 0.0130i

Ejemplo 2: si $z_0 = 0{,}45 - 0{,}60i, \Rightarrow |z_0| = 0{,}75$

k	z_0^k
1	0.4500 - 0.6000i
2	-0.1575 - 0.5400i
3	-0.3949 - 0.1485i
4	-0.2668 + 0.1701i
5	-0.0180 + 0.2366i
6	0.1339 + 0.1173i
7	0.1306 - 0.0275i
8	0.0422 - 0.0908i
9	-0.0354 - 0.0662i
10	-0.0557 - 0.0085i
11	-0.0302 + 0.0296i
12	0.0042 + 0.0314i
13	0.0207 + 0.0116i
14	0.0163 - 0.0072i
15	0.0030 - 0.0130i

Supongamos que los valores propios de A, además de ser simples, satisfacen que $\lambda_1 > 0$ y la condición de dominación:

$$|\lambda_2| < \lambda_1, |\lambda_3| < \lambda_1, \ldots, |\lambda_n| < \lambda_1. \tag{27}$$

Por (26),

$$\frac{\mathbf{y}_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{c}_n. \tag{28}$$

Supongamos que los valores propios de A, además de ser simples, satisfacen que $\lambda_1 > 0$ y la condición de dominación:

$$|\lambda_2| < \lambda_1, |\lambda_3| < \lambda_1, \ldots, |\lambda_n| < \lambda_1. \tag{27}$$

Por (26),

$$\frac{\mathbf{y}_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{c}_n. \tag{28}$$

Por la hipótesis de dominación y el Lema 1, se tiene que $\forall i = 2, \ldots, n$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0.$$

En consecuencia, existe el límite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{y}_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 \mathbf{c}_1. \tag{29}$$

Detallemos las componentes del vector propio $\mathbf{c}_1$ y del vector $\mathbf{y}_k$:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$$

Detallemos las componentes del vector propio $\mathbf{c}_1$ y del vector $\mathbf{y}_k$:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_1 < 1$ y para algún $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $c_{i1} = 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y_{ik} = 0.}$$

En efecto, llamando $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \ldots\}$ al conjunto de números naturales mayores que 1, como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{ik}}{\lambda_1^k} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_0$,

$$\left|\frac{y_{ik}}{\lambda_1^k}\right| < \sqrt{\varepsilon}; \Rightarrow |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} \qquad (30)$$

Si $\lambda_1 < 1$ y para algún $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $c_{i1} = 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y_{ik} = 0.}$$

En efecto, llamando $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \ldots\}$ al conjunto de números naturales mayores que 1, como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{ik}}{\lambda_1^k} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_0$,

$$\left|\frac{y_{ik}}{\lambda_1^k}\right| < \sqrt{\varepsilon}; \Rightarrow |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} \tag{30}$$

Si $\lambda_1 < 1$ y para algún $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $c_{i1} = 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y_{ik} = 0.}$$

En efecto, llamando $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \ldots\}$ al conjunto de números naturales mayores que 1, como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{ik}}{\lambda_1^k} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_0$,

$$\left|\frac{y_{ik}}{\lambda_1^k}\right| < \sqrt{\varepsilon}; \Rightarrow |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} \qquad (30)$$

Si $\lambda_1 < 1$ y para algún $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $c_{i1} = 0$, entonces

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} y_{ik} = 0.}$$

En efecto, llamando $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \ldots\}$ al conjunto de números naturales mayores que 1, como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{ik}}{\lambda_1^k} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_0$,

$$\left|\frac{y_{ik}}{\lambda_1^k}\right| < \sqrt{\varepsilon}; \ \Rightarrow |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} \tag{30}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k = 0,$$

$\exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_1$, $\lambda_1^k < \sqrt{\varepsilon}$. Por tanto, llamando $k_2 := \max(k_0, k_1)$, por (30) se sigue que

$$\forall k \geq k_2, \quad |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

$\square$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k = 0,$$

$\exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_1$, $\lambda_1^k < \sqrt{\varepsilon}$. Por tanto, llamando $k_2 := \max(k_0, k_1)$, por (30) se sigue que

$$\forall k \geq k_2, \quad |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

$\square$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k = 0,$$

$\exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_1$, $\lambda_1^k < \sqrt{\varepsilon}$. Por tanto, llamando $k_2 := \max(k_0, k_1)$, por (30) se sigue que

$$\forall k \geq k_2, \quad |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

$\square$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k = 0,$$

$\exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall k \geq k_1$, $\lambda_1^k < \sqrt{\varepsilon}$. Por tanto, llamando $k_2 := \max(k_0, k_1)$, por (30) se sigue que

$$\forall k \geq k_2, \quad |y_{ik}| < \lambda_1^k \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

$\square$

Llamando

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} y_{1,k+1} \\ y_{2,k+1} \\ \vdots \\ y_{n,k+1} \end{pmatrix},$$

supongamos que $\alpha_1 \neq 0$; quitemos la restricción de que $\lambda_1 < 1$; para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $c_{j1} \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

Llamando

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} y_{1,k+1} \\ y_{2,k+1} \\ \vdots \\ y_{n,k+1} \end{pmatrix},$$

supongamos que $\alpha_1 \neq 0$; quitemos la restricción de que $\lambda_1 < 1$; para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $c_{j1} \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

En efecto, por (29)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 c_{j1}. \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}} = \alpha_1 c_{j1}.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\alpha_1 c_{j1}}{\alpha_1 c_{j1}} = 1.$$

En efecto, por (29)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 c_{j1}. \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}} = \alpha_1 c_{j1}.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\alpha_1 c_{j1}}{\alpha_1 c_{j1}} = 1.$$

En efecto, por (29)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 c_{j1}. \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}} = \alpha_1 c_{j1}.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{\lambda_1^{k+1}}}{\lim_{k\to\infty} \frac{y_{jk}}{\lambda_1^k}} = \frac{\alpha_1 c_{j1}}{\alpha_1 c_{j1}} = 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k \lambda_1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

□

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k \lambda_1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

$\square$

Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k \lambda_1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{j,k+1}}{y_{jk}} = \lambda_1.$$

□

Los sistemas de recurrencias lineales son llamados también **sistemas de ecuaciones en diferencias finitas** por analogía con los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias: en vez de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ se considera $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k$, y la función vectorial incógnita $\mathbf{x}(t)$ que depende de la variable continua t, es reemplazada en esta analogía por la sucesión vectorial incógnita $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$ que depende de la variable discreta k.

Otra terminología

Los sistemas de recurrencias lineales son llamados también **sistemas de ecuaciones en diferencias finitas** por analogía con los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias: en vez de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ se considera $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_k$, y la función vectorial incógnita $\mathbf{x}(t)$ que depende de la variable continua t, es reemplazada en esta analogía por la sucesión vectorial incógnita $(\mathbf{y}_k)_{k=0}^{\infty}$ que depende de la variable discreta k.