Apéndice sobre ecuaciones diferenciales lineales

Juan-Miguel Gracia

10 de febrero de 2008

Índice

Índice

Índice

- Determinante wronskiano.
  - Wronskiano de $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$.
  - Derivada de un determinante de funciones.
  - Fórmula de Abel-Liouville para el wronskiano.
  - Wronskiano idénticamente nulo de funciones linealmente independientes.
  - Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
  - Wronskiano de soluciones.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
  - Solución del problema de condición inicial (P_0).
- Recurrencias lineales.
- Sistemas de recurrencias lineales.

Índice

- Determinante wronskiano.
  - Wronskiano de $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$.
  - Derivada de un determinante de funciones.
  - Fórmula de Abel-Liouville para el wronskiano.
  - Wronskiano idénticamente nulo de funciones linealmente independientes.
  - Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
  - Wronskiano de soluciones.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
  - Solución del problema de condición inicial (P_0).
- Recurrencias lineales.
- Sistemas de recurrencias lineales.

Índice

Índice

- Determinante wronskiano.
  - Wronskiano de $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$.
  - Derivada de un determinante de funciones.
  - Fórmula de Abel-Liouville para el wronskiano.
  - Wronskiano idénticamente nulo de funciones linealmente independientes.
  - Teorema de existencia y unicidad de soluciones.
  - Wronskiano de soluciones.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
  - Solución del problema de condición inicial (P_0).
- Recurrencias lineales.
- Sistemas de recurrencias lineales.

La letra I denotará un intervalo cualquiera de la recta real $\mathbb{R}$. El intervalo I puede ser de cualquiera de los nueve tipos

$$(a, b),\ [a, b],\ (a, b],\ [a, b) \text{ con } a < b,$$
$$(a, \infty),\ [a, \infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Si $f(t)$ es una función real definida en I y el intervalo I contuviera a uno de sus extremos finitos a o b, las derivadas $f^{(k)}(a)$ o $f^{(k)}(b)$ deben entenderse como derivadas laterales: $f^{(k)}(a) := f^{(k)}(a^+)$ (derivada por la derecha), o $f^{(k)}(b) := f^{(k)}(b^-)$ (derivada por la izquierda).

La letra I denotará un intervalo cualquiera de la recta real $\mathbb{R}$. El intervalo I puede ser de cualquiera de los nueve tipos

$$\begin{gathered}(a,b),\, [a,b],\ (a,b],\ [a,b) \text{ con } a<b,\\ (a,\infty),\, [a,\infty),\ (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (-\infty,\infty)=\mathbb{R}.\end{gathered}$$

Si $f(t)$ es una función real definida en I y el intervalo I contuviera a uno de sus extremos finitos a o b, las derivadas $f^{(k)}(a)$ o $f^{(k)}(b)$ deben entenderse como derivadas laterales: $f^{(k)}(a) := f^{(k)}(a^+)$ (derivada por la derecha), o $f^{(k)}(b) := f^{(k)}(b^-)$ (derivada por la izquierda).

Definición 1

Sean $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Diremos que estas funciones son **linealmente independientes** *en I si la relación: Para todo $t \in I$*

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son **linealmente dependientes** *en I.*

Definición 1

Sean $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Diremos que estas funciones son **linealmente independientes** *en I si la relación: Para todo $t \in I$*

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son **linealmente dependientes** *en I.*

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0,$$
$$\forall t, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0. \Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Las funciones $f_1(t) := t + 2$, $f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\begin{aligned} \forall t, &\quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \forall t, &\quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0$; $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0.\Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo

Las funciones $f_1(t) := t + 2$, $f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t + 2) + \alpha_2(t - 2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\begin{aligned} \forall t, \quad & \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \forall t, \quad & (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0$; $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0$. $\Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Las funciones $f_1(t) := t + 2, f_2(t) := t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ pues si existiesen unas constantes reales α_1, α_2 tales que $\forall t \in (-\infty, \infty)$,

$$\alpha_1(t+2) + \alpha_2(t-2) = 0, \tag{2}$$

se seguiría

$$\begin{aligned} \forall t, \quad \alpha_1 t + \alpha_2 t + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ \forall t, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y $2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Sumando las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 = 0; \Rightarrow \alpha_1 = 0$. De la ecuación segunda, $\alpha_2 = 0.\Rightarrow$ las funciones $t + 2$ y $t - 2$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

Estudiar la independencia lineal de las funciones $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ en $(-\infty, \infty)$. Supongamos que existan constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 t + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} + \alpha_3 t\mathrm{e}^{2t} = 0. \tag{3}$$

Dividiendo por e^{2t}, queda

$$\alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 + \alpha_3 t = 0 \tag{4}$$

Como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0,$$

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

si fuera $\alpha_3 \neq 0$, supongamos $\alpha_3 > 0$, se tendría por (4) que $\infty = 0$; imposible. Por ello, $\alpha_3 = 0$. De (4) deducimos,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \frac{t}{\mathrm{e}^{2t}} + \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Tomando límites en (5) cuando $t \to \infty$, se sigue que $\alpha_2 = 0$. De (3), $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_1 t = 0$; lo que implica $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente $t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

Definición 2

$$W(t) = W[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] :=$$

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$W[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] := \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix}$$

Definición 2

$$W(t) = W[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] :=$$

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$W[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] := \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix}$$

$$W[t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}] = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(1+2t) \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 4\mathrm{e}^{2t}(1+t) \end{vmatrix}$$

$$W[t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}] = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}(1+2t) \\ 0 & 4\mathrm{e}^{2t} & 4\mathrm{e}^{2t}(1+t) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}\, e^{2t} \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 2 & 1+2t \\ 0 & 4 & 4+4t \end{vmatrix} = e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t}(t-1).$$

$$= e^{2t}\, e^{2t} \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 2 & 1+2t \\ 0 & 4 & 4+4t \end{vmatrix} = e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t}(t-1).$$

$$= e^{2t}\, e^{2t} \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 2 & 1+2t \\ 0 & 4 & 4+4t \end{vmatrix} = e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t}(t-1).$$

$$= e^{2t}\, e^{2t} \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & 2 & 1+2t \\ 0 & 4 & 4+4t \end{vmatrix} = e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t} \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\, e^{4t}(t-1).$$

Sigue el ejemplo

$$W[t, \mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}] = 4\,\mathrm{e}^{4t}(t-1) \neq 0, \forall t \neq 1.$$

Teorema 1

Sean $f_1(t), \dots, f_n(t)$ funciones definidas y derivables hasta $n-1$ veces en un intervalo I. Si existe un $t_0 \in I$ t.q.

$$W[f_1(t), \dots, f_n(t)](t_0) \neq 0,$$

entonces $f_1(t), \dots, f_n(t)$ son linealmente independientes en I.

Demostración. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \forall t \in I, \tag{6}$$

derivando sucesivas veces,

$$\alpha_1 f_1'(t) + \cdots + \alpha_n f_n'(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\Downarrow$$

Teorema 1

Sean $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ funciones definidas y derivables hasta $n-1$ veces en un intervalo I. Si existe un $t_0 \in I$ t.q.

$$W[f_1(t), \ldots, f_n(t)](t_0) \neq 0,$$

entonces $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son linealmente independientes en I.

Demostración. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$\alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \qquad \forall t \in I, \tag{6}$$

derivando sucesivas veces,

$$\alpha_1 f_1'(t) + \cdots + \alpha_n f_n'(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n(t_0) = 0, \\ \alpha_1 f_1'(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n'(t_0) = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

Como (7) es un sistema de Cramer en las incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, se deduce que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\square$

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n(t_0) = 0, \\ \alpha_1 f_1'(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n'(t_0) = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

Como (7) es un sistema de Cramer en las incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, se deduce que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\square$

Sea

$$D(t) := \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}, \text{ para } t \in I.$$

Entonces,

$$D'(t) = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

Lo cual es fácil de probar.

Teorema 2 (Abel-Liouville)

Sea la ecuación diferencial

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{8}$$

donde $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son funciones reales continuas en un intervalo I. Sean $x_1(t), x_2(t)$ dos soluciones de (8) y sea

$$W(t) = W[x_1(t), x_2(t)].$$

Entonces,

$$\forall t \in I, \qquad W(t) = C\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Como

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix},$$

derivando resulta

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix}$$

$$= x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t);$$

pero $x_i''(t) = -a_1(t)x_i'(t) - a_2(t)x_i(t) = 0,\ i = 1, 2$; por tanto,

$$\begin{aligned} W'(t) &= x_1(t)\left[-a_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_2(t)\right] \\ &\quad - \left[-a_1(t)x_1'(t) - a_2(t)x_1(t)\right]x_2(t) \\ &= -a_1(t)x_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &\quad + a_1(t)x_1'(t)x_2(t) + a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &= -a_1(t)\left[x_1(t)x_2(t) - x_1'(t)x_2(t)\right] \\ &= -a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t). \end{aligned}$$

$$= x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t);$$

pero $x_i''(t) = -a_1(t)x_i'(t) - a_2(t)x_i(t) = 0,\ i = 1, 2$; por tanto,

$$\begin{aligned}
W'(t) &= x_1(t)\left[-a_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_2(t)\right] \\
&\quad - \left[-a_1(t)x_1'(t) - a_2(t)x_1(t)\right] x_2(t) \\
&= -a_1(t)x_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\
&\quad + a_1(t)x_1'(t)x_2(t) + a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\
&= -a_1(t)\left[x_1(t)x_2(t) - x_1'(t)x_2(t)\right] \\
&= -a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t).
\end{aligned}$$

$$= x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t);$$

pero $x_i''(t) = -a_1(t)x_i'(t) - a_2(t)x_i(t) = 0,\ i = 1, 2$; por tanto,

$$\begin{aligned} W'(t) &= x_1(t)\left[-a_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_2(t)\right] \\ &\quad - \left[-a_1(t)x_1'(t) - a_2(t)x_1(t)\right] x_2(t) \\ &= -a_1(t)x_1(t)x_2'(t) - a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &\quad + a_1(t)x_1'(t)x_2(t) + a_2(t)x_1(t)x_2(t) \\ &= -a_1(t)\left[x_1(t)x_2(t) - x_1'(t)x_2(t)\right] \\ &= -a_1(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\forall t \in I, \qquad W'(t) = -a_1(t)W(t); \tag{9}$$

es decir, que $W(t)$ satisface (9), que es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden;$\Rightarrow \exists C$ constante t. q.

$$W(t) = C\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\,\mathrm{d}t}.$$

$\square$

Veremos enseguida otra formulación del Teorema de Abel-Liouville.

Para ello necesitamos el teorema siguiente.

Teorema 3 (TFCI)

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I, sea x_0 un punto fijo de I, y definamos la función

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ para cada } x \in I.$$

Entonces $F(x)$ es derivable en I y su derivada viene dada por

$$F'(x) = f(x).$$

Veremos enseguida otra formulación del Teorema de Abel-Liouville. Para ello necesitamos el teorema siguiente.

Teorema 3 (TFCI)

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I, sea x_0 un punto fijo de I, y definamos la función

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ para cada } x \in I.$$

Entonces $F(x)$ es derivable en I y su derivada viene dada por

$$F'(x) = f(x).$$

Veremos enseguida otra formulación del Teorema de Abel-Liouville. Para ello necesitamos el teorema siguiente.

Teorema 3 (TFCI)

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I, sea x_0 un punto fijo de I, y definamos la función

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ para cada } x \in I.$$

Entonces $F(x)$ es derivable en I y su derivada viene dada por

$$F'(x) = f(x).$$

Sea

$$F(x) := \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Entonces por ser e^{-x^2} continua en todo $\mathbb{R}$ y por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, $\forall x$ real existe la derivada $F'(x)$ y

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Sea

$$F(x) := \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Entonces por ser e^{-x^2} continua en todo $\mathbb{R}$ y por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, $\forall x$ real existe la derivada $F'(x)$ y

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

También necesitamos otra expresión para la solución del problema de condición inicial

$$(P)\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $a(t)$ es una función continua en I, $t_0 \in I$, y x_0 es un número real cualquiera. La solución de (P) viene dada por

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

En efecto, por definición $\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s := 0$. Por tanto,

$$x(t_0) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s} = x_0 \mathrm{e}^0 = x_0 \cdot 1 = x_0;$$

así pues, $x(t)$ satisface la condición inicial. Además, por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, $\forall t \in I$,

$$x'(t) = x_0 a(t) \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = a(t)x(t).$$

También necesitamos otra expresión para la solución del problema de condición inicial

$$(P)\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $a(t)$ es una función continua en I, $t_0 \in I$, y x_0 es un número real cualquiera. La solución de (P) viene dada por

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

En efecto, por definición $\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s := 0$. Por tanto,

$$x(t_0) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s} = x_0 \mathrm{e}^0 = x_0 \cdot 1 = x_0;$$

así pues, $x(t)$ satisface la condición inicial. Además, por el Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, $\forall t \in I$,

$$x'(t) = x_0 a(t) \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = a(t)x(t).$$

Resumiendo, sin usar x_0, cualquier solución de $x' = a(t)x$ viene dada por

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Como $W(t)$ satisface $W'(t) = -a_1(t)W(t)$, se sigue que para cada $t_0 \in I$,

$$W(t) = W(t_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s}, \qquad \forall t \in I. \tag{10}$$

Resumiendo, sin usar x_0, cualquier solución de $x' = a(t)x$ viene dada por

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Como $W(t)$ satisface $W'(t) = -a_1(t)W(t)$, se sigue que para cada $t_0 \in I$,

$$W(t) = W(t_0)\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s}, \qquad \forall t \in I. \tag{10}$$

Veamos que para todo t real, $W[t^3, |t|^3] = 0$. En efecto, si $t \geq 0$, se sigue que $|t| = t$; por tanto $|t|^3 = t^3$, y

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si $t < 0$, entonces $|t| = -t$; de donde, $|t|^3 = (-t)^3 = -(t^3)$; por lo cual,

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Veamos que para todo t real, $W[t^3, |t|^3] = 0$. En efecto, si $t \geq 0$, se sigue que $|t| = t$; por tanto $|t|^3 = t^3$, y

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si $t < 0$, entonces $|t| = -t$; de donde, $|t|^3 = (-t)^3 = -(t^3)$; por lo cual,

$$W[t^3, |t|^3] = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sigue ejemplo $W[t^3, |t|^3] = 0$

En consecuencia $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = 0$. Pero, t^3 y $|t|^3$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$, ya que si α_1, α_2 son constantes reales t.q.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_1 t^3 + \alpha_2 |t|^3 = 0,$$

dando a t los valores particulares $t = 1$ y $t = -1$, deducimos

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones, $2\alpha_2 = 0$; $\Rightarrow \alpha_2 = 0$, $\Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Sigue ejemplo $W[t^3, |t|^3] = 0$

En consecuencia $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = 0$. Pero, t^3 y $|t|^3$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$, ya que si α_1, α_2 son constantes reales t.q.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_1 t^3 + \alpha_2 |t|^3 = 0,$$

dando a t los valores particulares $t = 1$ y $t = -1$, deducimos

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones, $2\alpha_2 = 0$; $\Rightarrow \alpha_2 = 0$, $\Rightarrow \alpha_1 = 0$.

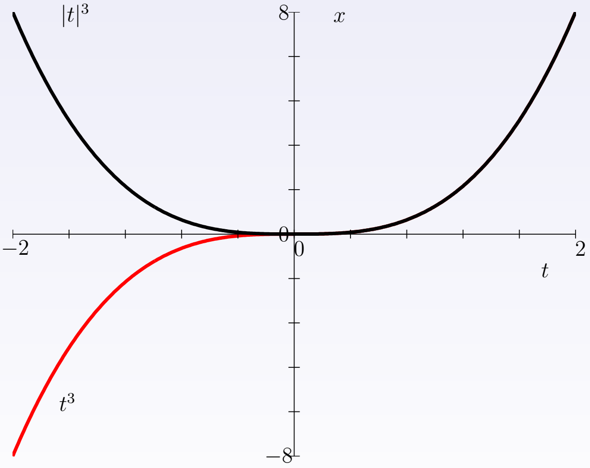

Figura: Gráficas de t^3 y $|t|^3$ en $-2 \leq t \leq 2$.

Por el Teorema 1 podemos decir que la no anulación del wronskiano en un punto t_0 es condición suficiente para la independencia lineal de las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, mas no es condición necesaria. Esto es, puede haber funciones linealmente independientes cuyo wronskiano se anule en todos los puntos del intervalo. Sin embargo, esta cuestión cambia drásticamente si $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

siendo $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ continuas en I. Antes de analizar el caso de dos funciones que son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, conviene que enunciemos el teorema de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones.

Por el Teorema 1 podemos decir que la no anulación del wronskiano en un punto t_0 es condición suficiente para la independencia lineal de las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, mas no es condición necesaria. Esto es, puede haber funciones linealmente independientes cuyo wronskiano se anule en todos los puntos del intervalo. Sin embargo, esta cuestión cambia drásticamente si $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

siendo $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ continuas en I. Antes de analizar el caso de dos funciones que son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, conviene que enunciemos el teorema de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones.

Por el Teorema 1 podemos decir que la no anulación del wronskiano en un punto t_0 es condición suficiente para la independencia lineal de las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, mas no es condición necesaria. Esto es, puede haber funciones linealmente independientes cuyo wronskiano se anule en todos los puntos del intervalo. Sin embargo, esta cuestión cambia drásticamente si $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

siendo $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ continuas en I. Antes de analizar el caso de dos funciones que son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, conviene que enunciemos el teorema de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones.

Por el Teorema 1 podemos decir que la no anulación del wronskiano en un punto t_0 es condición suficiente para la independencia lineal de las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, mas no es condición necesaria. Esto es, puede haber funciones linealmente independientes cuyo wronskiano se anule en todos los puntos del intervalo. Sin embargo, esta cuestión cambia drásticamente si $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

siendo $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ continuas en I. Antes de analizar el caso de dos funciones que son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, conviene que enunciemos el teorema de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones.

Teorema 4

Supongamos que $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son funciones reales definidas y continuas en un mismo intervalo I. Sean $t_0 \in I$ y c_0, c_1 números reales dados. Entonces el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \\ x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1 \end{cases}$$

tiene una solución (única) que está definida en todo el intervalo I.

La novedad de este teorema radica que en el caso general sólo se puede garantizar que la solución de

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1 \end{cases}$$

está definida en un entorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ de t_0; en el caso lineal la solución lo está en I, que incluso puede ser no acotado.

Teorema 4

Supongamos que $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son funciones reales definidas y continuas en un mismo intervalo I. Sean $t_0 \in I$ y c_0, c_1 números reales dados. Entonces el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \\ x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1 \end{cases}$$

tiene una solución (única) que está definida en todo el intervalo I.

La novedad de este teorema radica que en el caso general sólo se puede garantizar que la solución de

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), \\ x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1 \end{cases}$$

está definida en un entorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ de t_0; en el caso lineal la solución lo está en I, que incluso puede ser no acotado.

Teorema 5

Sean $x_1(t), x_2(t)$ *soluciones de*

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0. \tag{11}$$

Entonces $x_1(t), x_2(t)$ *son linealmente dependientes en el intervalo* I *si y sólo si existe un* $t_0 \in I$, *t.q.* $W(t_0) = W[x_1(t), x_2(t)](t_0) = 0$.

Si $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I, vamos a ver que para cualquier $t_0 \in I$, $W(t_0) = 0$. En efecto, existen constantes α_1, α_2, al menos una no nula, t.q. $\forall t \in I, \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) = 0$; derivando esta ecuación, $\alpha_1 x_1'(t) + \alpha_2 x_2'(t) = 0$. Cualquiera que sea $t \in I$ el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t) + \beta_2 x_2'(t) = 0, \end{cases}$$

admite una solución $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, este sistema no es de Cramer y su determinante debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Si $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I, vamos a ver que para cualquier $t_0 \in I$, $W(t_0) = 0$. En efecto, existen constantes α_1, α_2, al menos una no nula, t.q. $\forall t \in I, \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) = 0$; derivando esta ecuación, $\alpha_1 x_1'(t) + \alpha_2 x_2'(t) = 0$. Cualquiera que sea $t \in I$ el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t) + \beta_2 x_2'(t) = 0, \end{cases}$$

admite una solución $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, este sistema no es de Cramer y su determinante debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Recíprocamente, supongamos ahora que existe un $t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0$. Sea $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ una solución del sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t_0) + \beta_2 x_2(t_0) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t_0) + \beta_2 x_2'(t_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Definamos la función $y(t) := \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$, $t \in I$. Por ser $y(t)$ una combinación lineal de dos soluciones de (11) se sigue que $y(t)$ es solución de (11). Además, por satisfacer (λ_1, λ_2) las ecuaciones (12) se deduce que $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$. Pero, por la parte de unicidad del Teorema 4, esto implica que $\forall t \in I, y(t) = 0$. Así pues, $\forall t \in I$,

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

y $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I.

$\square$

Recíprocamente, supongamos ahora que existe un $t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0$. Sea $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ una solución del sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t_0) + \beta_2 x_2(t_0) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t_0) + \beta_2 x_2'(t_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Definamos la función $y(t) := \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$, $t \in I$. Por ser $y(t)$ una combinación lineal de dos soluciones de (11) se sigue que $y(t)$ es solución de (11). Además, por satisfacer (λ_1, λ_2) las ecuaciones (12) se deduce que $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$. Pero, por la parte de unicidad del Teorema 4, esto implica que $\forall t \in I, y(t) = 0$. Así pues, $\forall t \in I$,

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

y $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I.

□

Recíprocamente, supongamos ahora que existe un $t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0$. Sea $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ una solución del sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t_0) + \beta_2 x_2(t_0) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t_0) + \beta_2 x_2'(t_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Definamos la función $y(t) := \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$, $t \in I$. Por ser $y(t)$ una combinación lineal de dos soluciones de (11) se sigue que $y(t)$ es solución de (11). Además, por satisfacer (λ_1, λ_2) las ecuaciones (12) se deduce que $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$. Pero, por la parte de unicidad del Teorema 4, esto implica que $\forall t \in I, y(t) = 0$. Así pues, $\forall t \in I$,

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

y $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I.

$\square$

Recíprocamente, supongamos ahora que existe un $t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0$. Sea $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ una solución del sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas β_1, β_2

$$\begin{cases} \beta_1 x_1(t_0) + \beta_2 x_2(t_0) = 0, \\ \beta_1 x_1'(t_0) + \beta_2 x_2'(t_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Definamos la función $y(t) := \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$, $t \in I$. Por ser $y(t)$ una combinación lineal de dos soluciones de (11) se sigue que $y(t)$ es solución de (11). Además, por satisfacer (λ_1, λ_2) las ecuaciones (12) se deduce que $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$. Pero, por la parte de unicidad del Teorema 4, esto implica que $\forall t \in I, y(t) = 0$. Así pues, $\forall t \in I$,

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

y $x_1(t), x_2(t)$ son linealmente dependientes en I.

$\square$

Si $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n funciones reales de la variable real t, la función vectorial

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Por definición, $\mathbf{x}(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

son derivables en t.

$$\mathbf{x}'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}'(t)$ es la derivada de $\mathbf{x}$ en t.

Si $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son n funciones reales de la variable real t, la función vectorial

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Por definición, $\mathbf{x}(t)$ es derivable en t si

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

son derivables en t.

$$\mathbf{x}'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}'(t)$ es la derivada de $\mathbf{x}$ en t.

Si $x_1(t) = t^2,\ x_2(t) = \cos t,\ x_3(t) = \exp(t^2)$ entonces

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \exp(t^2) \end{pmatrix}$$

es derivable y

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2\,t \\ -\operatorname{sen} t \\ 2\,t\exp(t^2) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \tag{13}$$

Aquí, a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son las funciones incógnitas. Denotando $\mathbf{A} := (a_{ij})$, podemos escribir el sistema (13) así

Aquí, a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ son números reales dados y $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ son las funciones incógnitas. Denotando $\mathbf{A} := (a_{ij})$, podemos escribir el sistema (13) así

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

El sistema se escribe de forma resumida así:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{14}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo de coeficientes constantes. Si no hay dudas, (14) podemos omitir la t:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{15}$$

El sistema se escribe de forma resumida así:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{14}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo de coeficientes constantes. Si no hay dudas, (14) podemos omitir la t:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{15}$$

Debe quedar claro que $\mathbf{x}$ depende de t, pero $\mathbf{A}$ no depende: $\mathbf{A}$ es constante. Resolveremos el sistema (14) **bajo ciertas restricciones, muy generales.** En primer lugar, (Euler) tratamos de ver si existen soluciones de la forma

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}}$$

Debe quedar claro que $\mathbf{x}$ depende de t, pero $\mathbf{A}$ no depende: $\mathbf{A}$ es constante. Resolveremos el sistema (14) **bajo ciertas restricciones, muy generales.** En primer lugar, (Euler) tratamos de ver si existen soluciones de la forma

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}}$$

donde λ_0 es un *número* y $\mathbf{c}$ un *vector columna* distinto de

$$0 = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ ceros.}$$

Suponemos que el vector

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{es constante.}$$

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{16}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{17}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (16) y (17) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{18}$$

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0 \, e^{\lambda_0 \, t} \mathbf{c} \tag{16}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} e^{\lambda_0 \, t} \mathbf{c} = e^{\lambda_0 \, t} \mathbf{A}\mathbf{c} \tag{17}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (16) y (17) se sigue que

$$e^{\lambda_0 \, t} \lambda_0 \, \mathbf{c} = e^{\lambda_0 \, t} \mathbf{A}\mathbf{c} \tag{18}$$

Por la definición de derivada de una función vectorial se observa que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda_0\, e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} \tag{16}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{\lambda_0\, t}\mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{17}$$

Como $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, de (16) y (17) se sigue que

$$e^{\lambda_0\, t}\lambda_0\, \mathbf{c} = e^{\lambda_0\, t}\mathbf{A}\mathbf{c} \tag{18}$$

Dividiendo ambos miembros de (18) por $e^{\lambda_0 t}$,

$$\lambda_0 \, \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0 \, \mathbf{c}} \tag{19}$$

Así pues, (19) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ sea una solución de (13). Es fácil ver que (19) es también una condición suficiente.

Dividiendo ambos miembros de (18) por $e^{\lambda_0 t}$,

$$\lambda_0\,\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}} \tag{19}$$

Así pues, (19) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ sea una solución de (13). Es fácil ver que (19) es también una condición suficiente.

Dividiendo ambos miembros de (18) por $e^{\lambda_0 t}$,

$$\lambda_0 \mathbf{c} = \mathbf{Ac}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{Ac} = \lambda_0 \mathbf{c}} \tag{19}$$

Así pues, (19) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ sea una solución de (13). Es fácil ver que (19) es también una condición suficiente.

Dividiendo ambos miembros de (18) por $e^{\lambda_0 t}$,

$$\lambda_0\,\mathbf{c} = \mathbf{Ac}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{Ac} = \lambda_0\,\mathbf{c}} \tag{19}$$

Así pues, (19) es una condición necesaria para que la función $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ sea una solución de (13). Es fácil ver que (19) es también una condición suficiente.

Resumiendo:

Proposición 1

La función vectorial $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ *es una solución del sistema diferencial lineal* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *si y sólo si el número* λ_0 *y el vector columna* $\mathbf{c}$ *satisfacen la ecuación algebraica*

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

Nota.- La función nula $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (13), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ tratamos de encontrar un vector $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{Ac} = \lambda_0\,\mathbf{c}$. Esta ecuación es equivalente a $\mathbf{Ac} = \lambda_0\,\mathbf{Ic}$, siendo

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz unidad (o identidad) de orden n.

Nota.- La función nula $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de (13), pero esta solución no interesa. Por ello, al buscar una solución de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$ tratamos de encontrar un vector $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Para encontrar esta solución debemos buscar un número λ_0 y un vector columna $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ tales que $\mathbf{Ac} = \lambda_0 \, \mathbf{c}$. Esta ecuación es equivalente a $\mathbf{Ac} = \lambda_0 \, \mathbf{Ic}$, siendo

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz unidad (o identidad) de orden n.

La ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0 \, \mathbf{I}\mathbf{c}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}) \, \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{c}$ ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$|\lambda \, \mathbf{I} - \mathbf{A}| \tag{20}$$

La ecuación

$$\mathbf{Ac} = \lambda_0\, \mathbf{Ic}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0\, \mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{c}$ ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0\, \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$|\lambda\, \mathbf{I} - \mathbf{A}| \tag{20}$$

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \tag{21}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

en las incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

y resolver la ecuación en la incógnita λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0. \tag{21}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

en las incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Una solución $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ de (22) con no todas las componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector columna n-dimensional $\mathbf{c}$ no nulo t.q.

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

El vector $\mathbf{c}$ se llama *vector propio* de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_0.

Otras terminologías equivalentes

λ_0	$\mathbf{c}$
valor propio	vector propio
autovalor	autovector
valor característico	vector característico
raíz latente	vector latente
eigenvalor	eigenvector

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector columna n-dimensional $\mathbf{c}$ no nulo t.q.

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0\,\mathbf{c}.$$

El vector $\mathbf{c}$ se llama *vector propio* de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_0.

Otras terminologías equivalentes

λ_0	$\mathbf{c}$
valor propio	vector propio
autovalor	autovector
valor característico	vector característico
raíz latente	vector latente
eigenvalor	eigenvector

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{24}$$

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{24}$$

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (24):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$, resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}) \, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por la regla de Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (24):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$, resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0 \, \mathbf{I} - \mathbf{A}) \, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos este sistema en la forma

$$\begin{cases} c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\begin{cases} c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Ejemplo

Escribimos este sistema en la forma

$$\left\{\begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_2 - 4c_3 & = & 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Este sistema es equivalente al anterior. Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\left\{\begin{aligned} c_2 &= 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 &= -c_3 \end{aligned}\right.$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\left\{\begin{aligned} c_2 &= 4 \\ -3c_1 - c_2 &= -1 \end{aligned}\right. \implies \boxed{c_2 = 4}\ ;$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \implies \boxed{c_1 = -1}$$

Ejemplo

Este sistema es equivalente al anterior. Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_2 & = & 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 & = & -c_3 \end{array} \right.$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_2 & = & 4 \\ -3c_1 - c_2 & = & -1 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c_2 = 4} \, ;$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c_1 = -1}$$

Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4\,e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ 4\,e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema diferencial lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hemos terminado el ejemplo.

Sea ahora un $\mathbf{x}_0$ un vector columna dado de n componentes:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el problema de hallar la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$:

$$(P_0) \begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$.

Sea ahora un $\mathbf{x}_0$ un vector columna dado de n componentes:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el problema de hallar la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$:

$$(P_0) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right.$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$.

Sea ahora un $\mathbf{x}_0$ un vector columna dado de n componentes:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el problema de hallar la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema diferencial lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ que satisface la *condición inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$:

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}'(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = & \mathbf{x}_0 \end{array} \right.$$

La solución de problema (P_0) *no* es necesariamente de la forma $e^{\lambda_0 t}\mathbf{c}$.

Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, $\mathbf{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 6

Si los n valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, entonces los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes.

Sin demostración.

Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, $\mathbf{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 6

Si los n valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, entonces los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes.

Sin demostración.

Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, $\mathbf{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 6

Si los n valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, entonces los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes.

Sin demostración.

Supondremos desde ahora que la matriz de orden n, $\mathbf{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 6

Si los n valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, entonces los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son linealmente independientes.

Sin demostración.

Supondremos desde ahora que la matriz de orden $n, \mathbf{A}$, tiene n valores propios distintos. Dicho de otro modo, supondremos que la ecuación en λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

tiene sus n raíces simples. Con esta hipótesis daremos un método de resolución. El problema (P_0) tiene una solución única. No daremos la demostración de esta afirmación última aquí. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$. Estamos suponiendo que son n números distintos. Sean $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

Teorema 6

Si los n valores propios de $\mathbf{A}$ *son distintos, entonces los vectores propios* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ *son linealmente independientes.*

Sin demostración.

Expresemos $\mathbf{x}_0$ como combinación lineal de los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

Tal combinación existe y es única pues $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es una base del espacio formado por todos los vectores columna $n \times 1$. La solución de (P_0) viene dada por la fórmula

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{c}_n.}$$

Expresemos $\mathbf{x}_0$ como combinación lineal de los vectores propios $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n.$$

Tal combinación existe y es única pues $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es una base del espacio formado por todos los vectores columna $n \times 1$. La solución de (P_0) viene dada por la fórmula

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{c}_n.}$$

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \lambda_n \mathbf{c}_n;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{c}_n\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot 0} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot 0} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n \cdot 0} \mathbf{c}_n =$$

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n = \mathbf{x}_0.$$

$\square$

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \lambda_n \mathbf{c}_n;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \mathbf{c}_n\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot 0} \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot 0} \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n \cdot 0} \mathbf{c}_n = \\ \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n = \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

$\square$

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\lambda_n \mathbf{c}_n;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{c}_n\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot 0}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot 0}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n \cdot 0}\mathbf{c}_n = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n = \mathbf{x}_0.$$

$\square$

Demostración: Derivemos,

$$\mathbf{x}'(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\lambda_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\lambda_n \mathbf{c}_n;$$

pero $\lambda_i \mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{A}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{A}\mathbf{c}_n \\ &= \mathbf{A}\left(\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}\mathbf{c}_n\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot 0}\mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot 0}\mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n \cdot 0}\mathbf{c}_n = \\ \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n = \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

$\square$

Resolver el problema de condición inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}'(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

con

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{A}$ es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.

Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.

Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda\, \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.
Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es la matriz de un ejemplo anterior. Allí calculamos uno de valores propios de $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 1$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.

Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 = 3 \text{ es una raíz.}$$

Solución

	1	-2	-5	6
-2		-2	8	-6
	1	-4	3	0

$\Longrightarrow$ $\lambda_3 = -2$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_3 = -2 \text{ es una raíz.}$$

Solución

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ es una raíz.}$$

Como las *tres* raíces del polinomio característico de $\mathbf{A}$, $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$, son *simples* (y $\mathbf{A}$ es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*. Por lo tanto, podemos aplicar el método de resolución dado a este sistema diferencial lineal.

Calculamos un vector propio $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ asociado a cada uno de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como las *tres* raíces del polinomio característico de $\mathbf{A}$, $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$, son *simples* (y $\mathbf{A}$ es de orden 3) estamos bajo las condiciones de la *Hipótesis Suplementaria*. Por lo tanto, podemos aplicar el método de resolución dado a este sistema diferencial lineal.
Calculamos un vector propio $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ asociado a cada uno de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x}_0$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

cuya solución es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 0, -4/3)$.

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x}_0$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

cuya solución es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 0, -4/3)$.

Ahora busquemos la expresión del vector inicial $\mathbf{x}_0$ como combinación lineal de $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$:

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

esto nos conduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

cuya solución es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 0, -4/3)$.

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{t}}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{t} + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 4(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \mathrm{e}^{t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{t}}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^{t}}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{t} + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 4(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \mathrm{e}^{t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^t}{3} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{4\,\mathrm{e}^t}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \\ \frac{\mathrm{e}^t}{3} - \frac{4\,\mathrm{e}^{-2t}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t + 4\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 4(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t}) \\ \mathrm{e}^t - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Resolver el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ (e^{7t} + e^{-5t})/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Solución.-

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{4t} + 3e^{-t} \\ 3e^{4t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.- Hallar la solución del problema de condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) - 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) & = & - x_2(t) \\ x_3'(t) & = & - x_2(t) - 2x_3(t) \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1(0) & = & -2 \\ x_2(0) & = & 0 \\ x_3(0) & = & 3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$