Máximos, mínimos y puntos de ensilladura

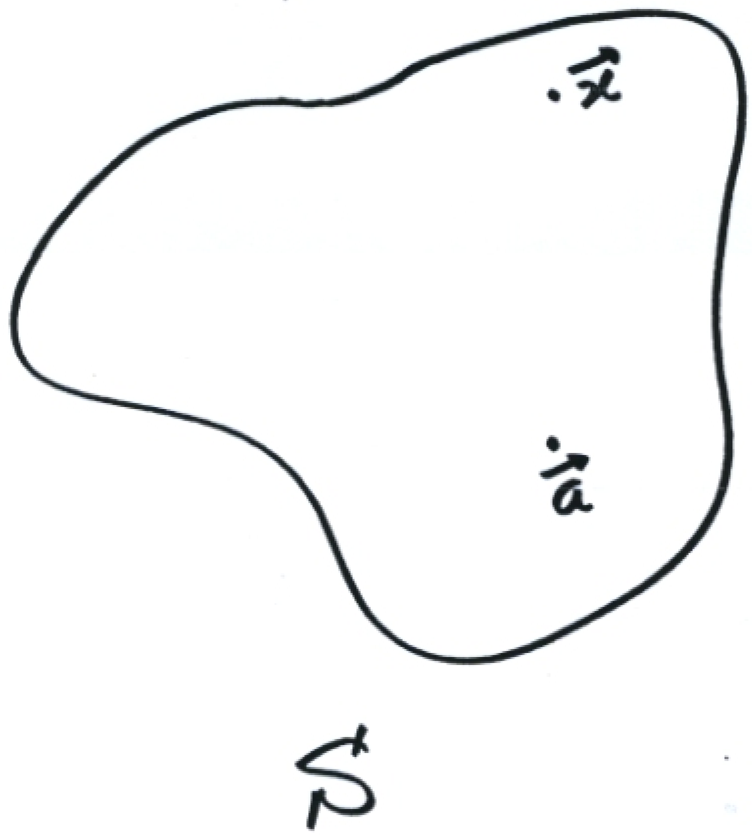
Definición.- Se dice que una función real $f(\vec{x})$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $\vec{a}$ de un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ si

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \tag{2}$$

para todo $\vec{x} \in S$. El número $f(\vec{a})$ se llama *máximo absoluto de* $f(\vec{x})$ *en* S. Se dice que la función $f(\vec{x})$ tiene un *máximo relativo* en $\vec{a}$ si la desigualdad (2) se satisface para todo $\vec{x}$ de la intersección de un cierto entorno $B(\vec{a}, \delta)$ de $\vec{a}$ con S.

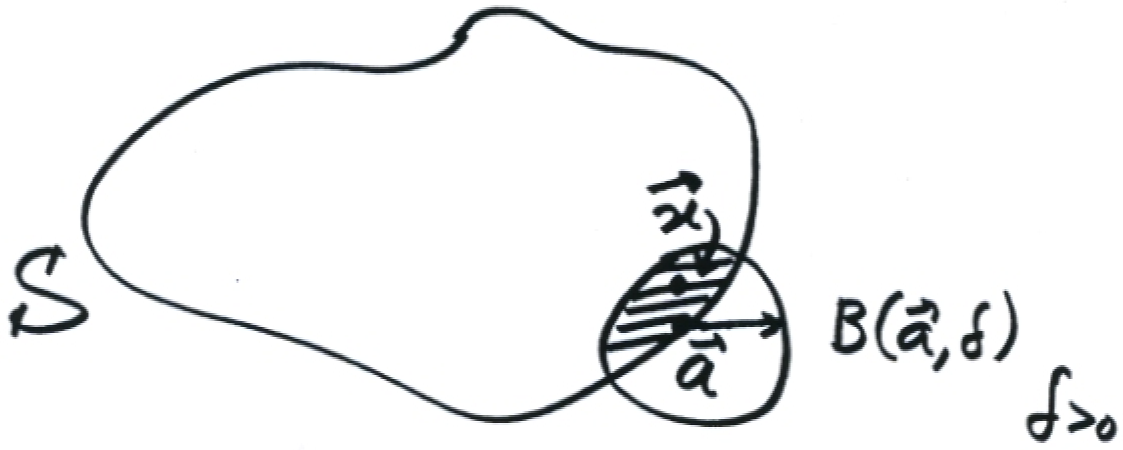
$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$, para todo $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) \cap S$.

Para $\delta > 0$, $B(\vec{a}, \delta) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta\}$.



$$f(\vec{a}) \geq f(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in S$$

máximo absoluto en S



$$f(\vec{a}) \geq f(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) \cap S$$

máximo relativo

Notaciones

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función real de n variables, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Si $n = 2$ escribimos $f(x_1, x_2)$ o bien $f(x, y)$. Si $n = 3$, queda $f(x_1, x_2, x_3)$ o bien $f(x, y, z)$.

Caso $n = 2$. $f(x_1, x_2)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$ si

$$f(a_1, a_2) \leq f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0) de S, con S subconjunto del plano x, y, si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x,y)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0,y_0) de S, si existe un entorno $B\Big((x_0,y_0),\delta\Big)$ de (x_0,y_0) tal que

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B\Big((x_0,y_0),\delta\Big) \cap S.$$

Otra terminología

global $\Leftrightarrow$ absoluto

local $\Leftrightarrow$ relativo

“Piensa . . . , pero actúa . . . ”

<u>Caso $n = 3$.</u> $f(x_1, x_2, x_3)$ *mínimo absoluto* en el punto $(a_1, a_2, a_3) \in S \subset \mathbb{R}^3$ si

$$f(a_1, a_2, a_3) \leq f(x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S.$$

De manera clásica, $f(x, y, z)$ *mínimo absoluto* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S, con S subconjunto del espacio x, y, z, si

$$f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Análogamente, se dice que $f(x, y, z)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0, z_0) de S, si existe un entorno $B\Big((x_0, y_0, z_0), \delta\Big)$ de (x_0, y_0, z_0) tal que $f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z)$ $\forall (x, y, z) \in B\Big((x_0, y_0, z_0), \delta\Big) \cap S$.

Condición necesaria para máximo o mínimo relativo

Teorema 1.-*Si f(x,y) tiene un mínimo relativo en el punto* (x_0, y_0) *y admite derivadas parciales en ese punto, entonces*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

<u>Demostración.-</u> Si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0), entonces $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ para todo número real x suficientemente próximo a x_0. Llamando $g(x) := f(x, y_0)$ resulta $g(x_0) \leq g(x)$ para $x \approx x_0$; lo que implica que $g'(x_0) = 0$. Pero, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Considerando la función $h(y) := f(x_0, y)$, se ve que $h(y)$ tiene un mínimo en y_0 y por tanto

$$0 = h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0).$$

$\blacksquare$

En general, si $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ tiene un mínimo (o maximo) relativo en el punto $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n$ y existen las derivadas parciales $D_1 f(\vec{\boldsymbol{a}}), \ldots, D_n f(\vec{\boldsymbol{a}})$, se sigue que

$$D_1 f(\vec{\boldsymbol{a}}) = 0, \ldots, D_n f(\vec{\boldsymbol{a}}) = 0;$$

es decir, $\nabla f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$. Por otra parte, es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en $\vec{\boldsymbol{a}}$ no implica necesariamente la existencia de un mínimo (o máximo) relativo en $\vec{\boldsymbol{a}}$. Esto sucede en los llamados puntos de ensilladura.

Definición.- Supongamos que f sea diferenciable en $\vec{\boldsymbol{a}}$. Si $\nabla f(\vec{\boldsymbol{a}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ el punto $\vec{\boldsymbol{a}}$ se llama *punto crítico (o estacianario)* de f. Un punto crítico se llama de *ensilladura (o de silla)* si **en todo** entorno $B(\vec{\boldsymbol{a}}, \delta)$ de $\vec{\boldsymbol{a}}$ hay puntos $\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}$ tales que $f(\vec{\boldsymbol{y}}) < f(\vec{\boldsymbol{a}})$ y $f(\vec{\boldsymbol{z}}) > f(\vec{\boldsymbol{a}})$.

En el caso $n = 1$; esto es, si f es función de una sola variable real x, los puntos donde $f'(x) = 0$ se clasifican en máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Ejemplo 1.- *Máximo relativo*

$z = f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; $f'_x = -2x, f'_y = -2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 2 \geq 2 - (x^2 + y^2) = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 2.- *Mínimo relativo*

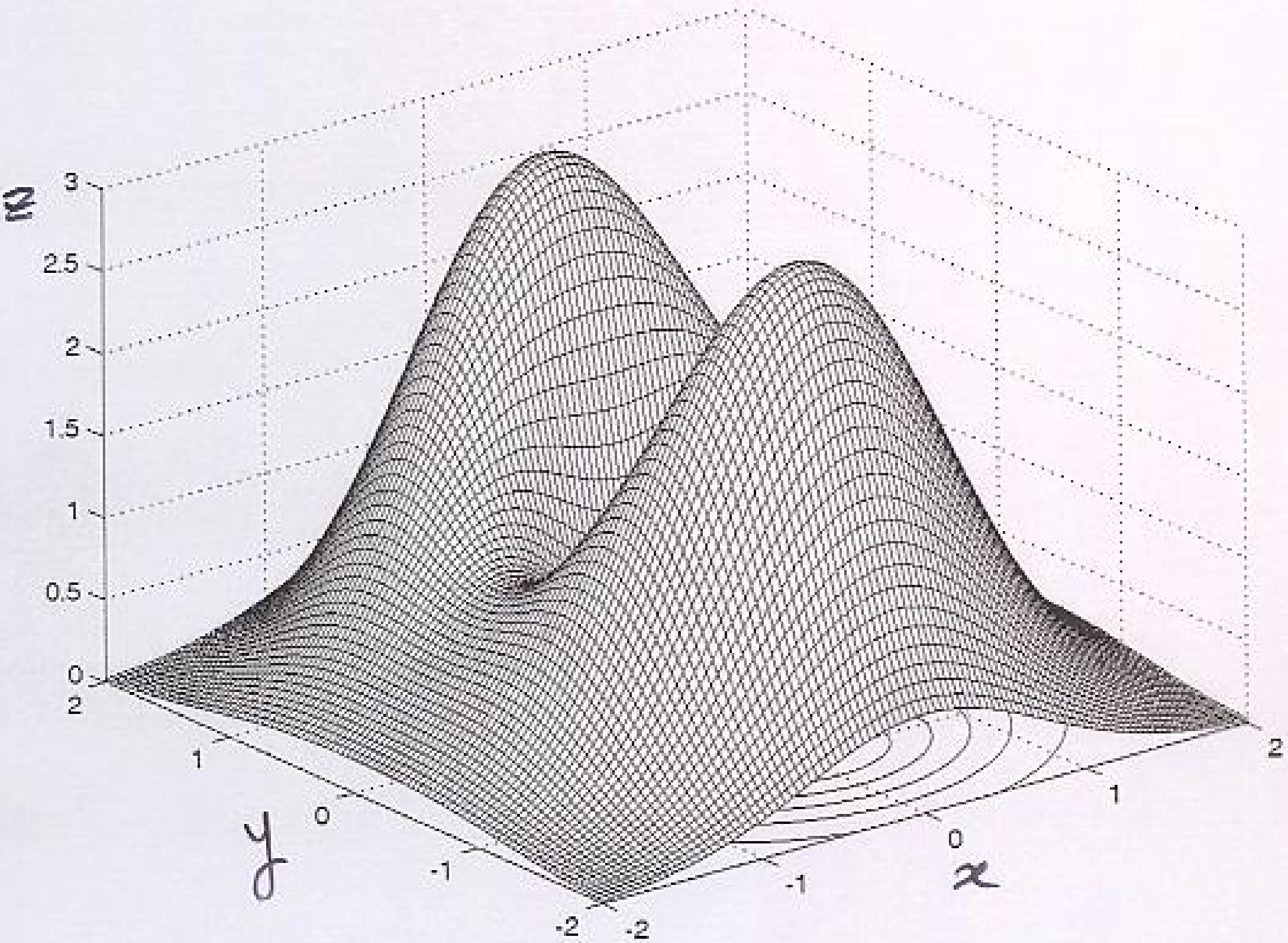
$z = f(x,y) = x^2 + y^2$; $f'_x = 2x, f'_y = 2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 3.- *Punto de ensilladura*

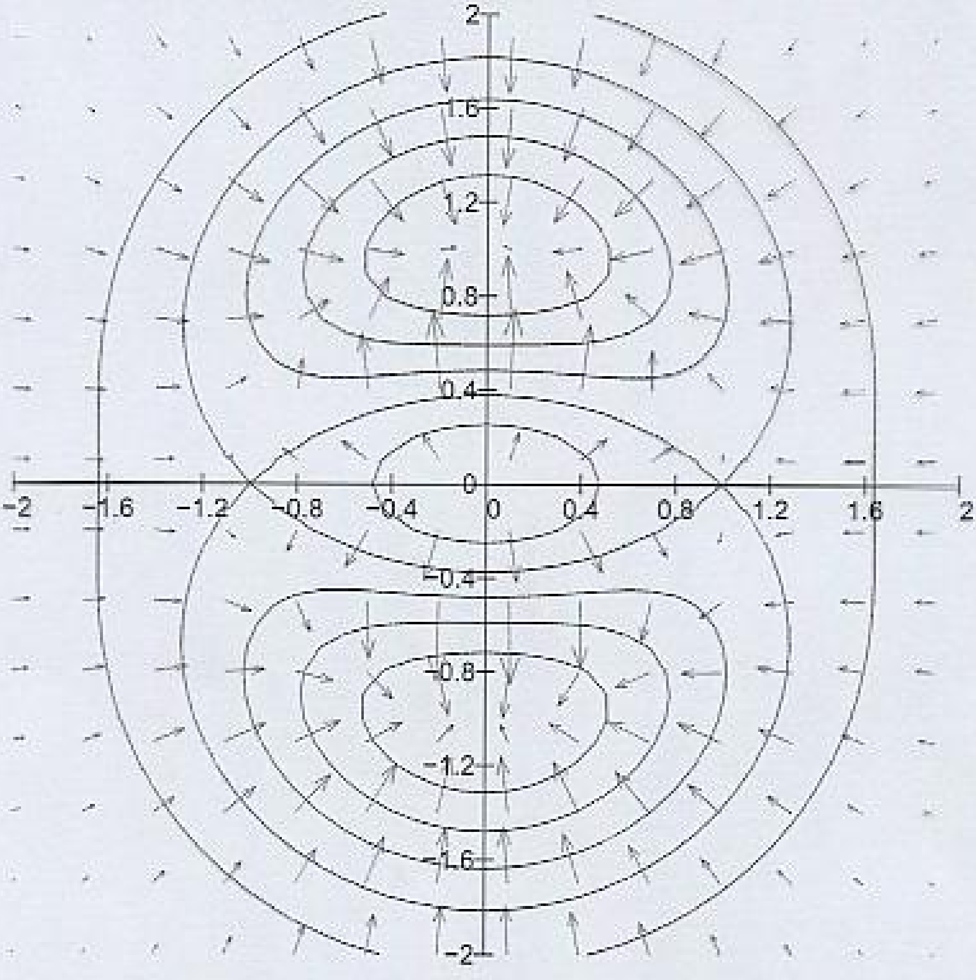
$z = f(x,y) = xy$; $f'_x = y, f'_y = x \Rightarrow (0,0)$ único punto crítico.

$f(0,0) = 0$ y es obvio que existen puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ tan próximos a $(0,0)$ como se desee tales que los números x_1 e y_1 tengan signos iguales y los números x_2 e y_2 tengan signos opuestos.

$$z = (x^2 + 3y^2)\, e^{(1-x^2-y^2)}$$



$$z = (x^2+3y^2)\, e^{(1-x^2-y^2)}$$



Gradientes y curvas de nivel

Ejemplo 4.- El ejemplo canónico.

$$z = f(x,y) = (x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 2\,x\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} - 2\,x\left(x^2+3\,y^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} \\ &= -2\,x\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-1+x^2+3\,y^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= 6\,y\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} - 2\,y\left(x^2+3\,y^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2-y^2} \\ &= -2\,y\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-3+x^2+3\,y^2\right) \end{aligned}$$

Como $\mathrm{e}^t > 0$ para todo $t \Rightarrow f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0$;

$f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0.$

<u>puntos críticos</u>

$$\begin{cases} -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0, \\ -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 + x^2 + 3\,y^2 = 0, \\ -3 + x^2 + 3\,y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\begin{cases} x^2 + 3\,y^2 = 1, \\ x^2 + 3\,y^2 = 3. \end{cases}$ ¡imposible!: incompatible.

Por tanto, si (x, y) es un punto crítico, tiene que ser $x = 0$ ó $y = 0$. Es evidente que $(x, y) = (0, 0)$ es una solución. Si $x = 0, y \neq 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2\,y\left(-3 + 3y^2\right) &= 0, \\ -3 + 3y^2 &= 0, \\ -1 + y^2 &= 0, \\ y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1; &\Rightarrow (x, y) = (0, \pm 1) \end{aligned}$$

Si $x \neq 0, y = 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2\,x\left(-1 + x^2\right) &= 0, \\ -1 + x^2 &= 0, \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; &\Rightarrow (x, y) = (\pm 1, 0). \end{aligned}$$

Por lo que hay 5 puntos críticos:

$(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,0)$ y $(1,0)$.

Por la gráfica de $z = f(x,y)$ y el mapa de las curvas de nivel sabemos que: en $(0,0)$ hay un mínimo relativo, en $(0,-1)$ y en $(0,1)$ hay máximos relativos, y en $(-1,0)$ y $(1,0)$ hay puntos de ensilladura.

Pero, ¿qué podemos hacer cuando no dispongamos de estas gráficas? Respuesta: Utilizar el criterio dado en el teorema siguiente.

Naturaleza de un punto crítico por medio de la matriz hessiana

Sea $f(\vec{x})$ una función real que admite derivadas parciales segundas continuas $D_{ij}f(\vec{x})$ en un entorno de $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$; se define la matriz hessiana de $f(\vec{x})$ en $\vec{a}$ como sigue

$$H(\vec{a}) := \begin{pmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) & \cdots & D_{1n}f(\vec{a}) \\ D_{21}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) & \cdots & D_{2n}f(\vec{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{n1}f(\vec{a}) & D_{n2}f(\vec{a}) & \cdots & D_{nn}f(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Denotemos por $p_{\vec{a}}(\lambda) := |\lambda I_n - H(\vec{a})|$ el polinomio característico de la matriz $H(\vec{a})$; es un polinomio de grado n en la variable λ. Por ser simétrica la matriz $H(\vec{a})$ todas las raíces de este polinomio son números reales.

Se dice que un número real x es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$

Designamos por $d_1(\vec{a}), d_2(\vec{a}), \ldots, d_n(\vec{a})$ los menores principales de la matriz hessiana:

$$d_1(\vec{a}) := D_{11}f(\vec{a}),\ d_2(\vec{a}) := \begin{vmatrix} D_{11}f(\vec{a}) & D_{12}f(\vec{a}) \\ D_{21}f(\vec{a}) & D_{22}f(\vec{a}) \end{vmatrix},$$

$$\ldots, d_n(\vec{a}) := |H(\vec{a})|.$$

Teorema 2.- (Criterio ó condiciones suficientes) *Supongamos que $\vec{a}$ es un punto crítico de $f(\vec{x})$.*

(a) *Si $d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un mínimo relativo en $\vec{a}$.*

(b) *Si $(-1)^k d_k(\vec{a}) > 0$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $f(\vec{x})$ tiene un máximo relativo en $\vec{a}$.*

(c) *Si el polinomio $p_{\vec{a}}(\lambda)$ tiene al menos una raíz positiva y una raíz negativa, entonces $f(\vec{x})$ tiene un punto de ensilladura en $\vec{a}$.*

Las derivadas parciales segundas de la función $f(x,y) = (x^2+3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$ del Ejemplo 4 son

$$D_{11}f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$$
$$2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(1-5\,x^2-3\,y^2+2\,x^4+6\,y^2x^2\right),$$
$$D_{12}f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$$
$$4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4+x^2+3\,y^2\right),$$
$$D_{21}f(y,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) =$$
$$4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4+x^2+3\,y^2\right),$$
$$D_{22}f(y,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$
$$2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(3-15\,y^2-x^2+2\,y^2x^2+6\,y^4\right).$$

Por lo tanto, la matriz hessiana de $f(x, y)$ en cada uno de los 5 puntos críticos (x_0, y_0)

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

es

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 6\mathrm{e} \end{pmatrix}, d_1 = 2\mathrm{e} > 0, d_2 = 12\mathrm{e}^2 > 0,$$

mínimo relativo

$$H(0, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(0, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = 48 > 0,$$

máximo relativo

$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, d_1 = -4 < 0, d_2 = -16 < 0, ?$$

En el caso de los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, las hipótesis de los apartados (a) y (b) del Teorema 2 no se cumplen. Probemos con (c); el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 4);$$

por tanto, las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ son $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$; la primera es negativa y la segunda es positiva. En consecuencia, los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son puntos de ensilladura.

Ejemplo 5.- Sea $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$. Como $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = -2z$ se ve que $(0, 0, 0)$ es el único punto crítico. La matriz hessiana $H(x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

para todo (x, y, z). Por tanto, su polinomio característico es

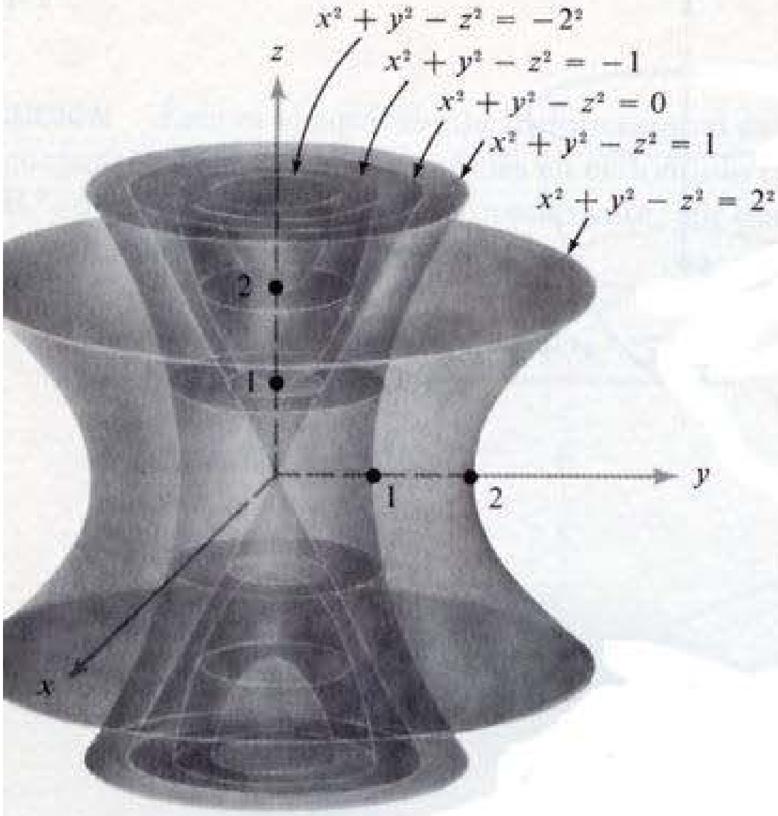
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2);$$

sus raíces son $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = -2$ (simple).

Como tiene al menos una positiva y otra negativa, por Teorema 2, (c), se sigue que $(0,0,0)$ es un punto de ensilladura de $f(x,y,z)$.

Una gráfica que contiene algunas superficies de nivel de esta función puede verse en la hoja P–7, que para facilidad del lector incluimos también en la página siguiente.

Obsérvese que la superficie de nivel $x^2+y^2-z^2=0$ es un cono que pasa por $(0,0,0)$; que para valores positivos de c la superficie de nivel $x^2+y^2-z^2=c$ consta de una sola hoja y para valores negativos de c cada una de estas superficies está formada por dos hojas situadas en los dos lados del cono.


$x^2 + y^2 - z^2 = -2^2$
$x^2 + y^2 - z^2 = -1$
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
$x^2 + y^2 - z^2 = 2^2$
z
2
1
1
2
y
x

Ajuste por mínimos cuadrados

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales.

Problema.- Hallar los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Es decir, buscar el punto (a, b) que hace mínimo el valor de la función

$$E(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Solución.- $E(a,b) := \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2n$$

Puntos críticos

$$\begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \qquad a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Sean las medias

$\bar{x} := (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n, \quad \bar{y} = (\sum_{i=1}^{n} y_i)/n;$

es decir, $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de los puntos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$. La ecuación segunda de (3) se puede reescribir como
$a\bar{x} + b = \bar{y}$.

La solución de (3) viene dada por

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

El determinante de la matriz hessiana $H(a,b)$ es igual a

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b}\right)^2 = 2n\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$
$$= 4\left\{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right\}.$$

Desigualdad de Schwarz

$$(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})$$

en efecto, $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \|\vec{\boldsymbol{a}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{b}}\|\cos\theta$; como $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$, se sigue que $\|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2\ \|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2\cos^2\theta \leq \|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2\ \|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2$. Si $\cos^2\theta < 1$, entonces $\leq$ se puede refinar a $<$.

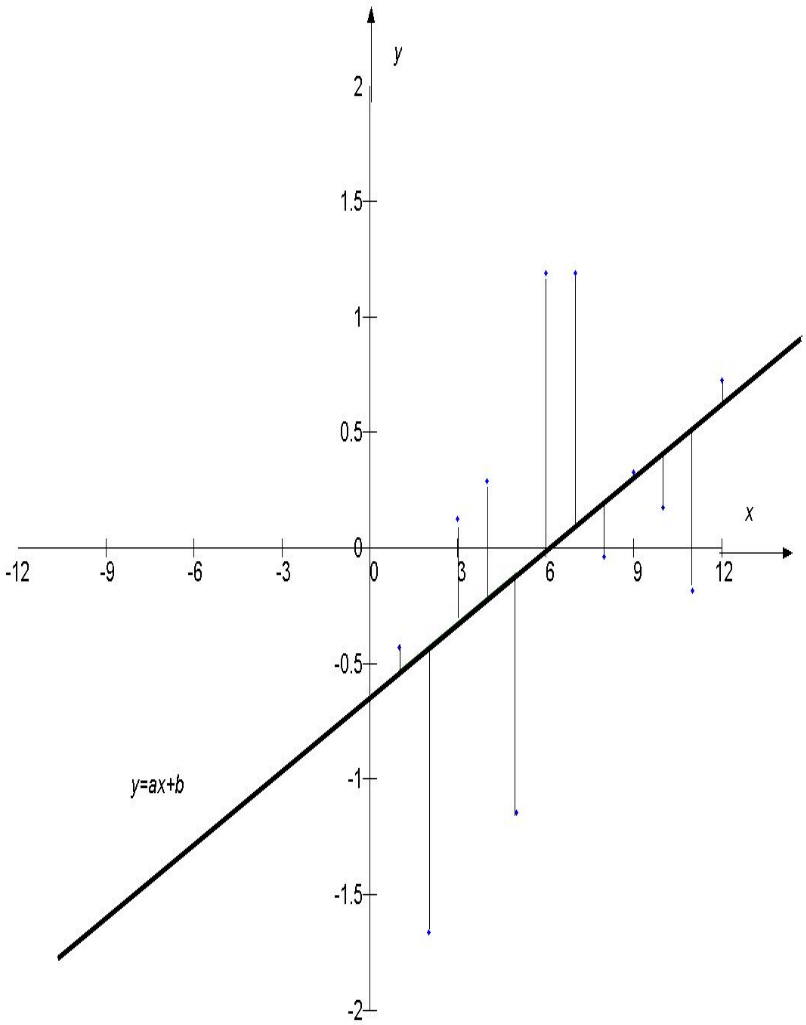
Tomando $\vec{\boldsymbol{e}} := (1,\ldots,1), \vec{\boldsymbol{x}} := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, se deduce que $(\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{e}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}})(\vec{\boldsymbol{x}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})$. Lo que equivale a $\left(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Como los $x_1,\ldots,x_n$ son distintos se tiene que $\left(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Por lo tanto, el determinante de $H(a,b)$ es positivo; además el elemento de la posición 1,1 de $H(a,b)$ es $\dfrac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$; por el Teorema 2 (a), la función $E(a,b)$ tiene un mínimo relativo en el punto crítico (a,b). Como $E(a,b)$ tiende a infinito cuando a y b tienden a infinito; este mínimo relativo es también mínimo absoluto (pues sólo hay un punto crítico).

Ejemplo.- Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos dados por la tabla siguiente.

x_i	y_i
1	-0.4326
2	-1.6656
3	0.1253
4	0.2877
5	-1.1465
6	1.1909
7	1.1892
8	-0.0376
9	0.3273
10	0.1746
11	-0.1867
12	0.7258

Respuesta: $y = 0{,}1046x - 0{,}6340$.


y
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
x
-12
-9
-6
-3
0
3
6
9
12
y=ax+b

Ajuste polinómico por mínimos cuadrados

Problema.- Hallar el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

que mejor se ajusta a los puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos,

$(m+1 \leq n+1)$. Esto es, encontrar el mínimo de la función

$$E(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) := \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i)^2.$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{\partial E}{\partial a_i}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0,$$

$$i = 0, \ldots, m,$$

se obtienen los puntos críticos.

De hecho, este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema de *ecuaciones normales*

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_m a_m = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{m+1} a_m = t_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \cdots + s_{2m} a_m = t_m \end{cases}$$

donde

$$s_k := \sum_{i=0}^{n} x_i^k, \quad t_k := \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k.$$

Este sistema de ecuaciones determina los a_j unívocamente, y los a_j resultantes nos dan el mínimo valor posible de E.

Ejercicio 35.-

Sea (x_0, y_0) un punto crítico de una función $f(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas en un entorno del punto (x_0, y_0). Sea Δ el determinante de la matriz hessiana de $f(x, y)$ en dicho punto.

Demostrar que si $\Delta < 0$, la función $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en (x_0, y_0).

Ejercicio 36.-

Sea $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Deducir por observación de las curvas de nivel que $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

Ejercicio 37.-

Sea $z = f(x, y) = x^2y^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el Teorema 2. Probar que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 38.-

Para cada una de las funciones siguientes identificar y clasificar los puntos estacionarios:

1. $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

2. $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$.

3. $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

4. $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

5. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.

6. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

7. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

8. $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$.

9. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

10. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$. El seno y el coseno hiperbólicos de t se definen así $\operatorname{sh} t := (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$, $\operatorname{ch} t := (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$. Es fácil verificar que $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t, (\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$.

11. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

12. $f(x,y) = (5x + 7y - 25)\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$.

13. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$.

14. $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, (x > 0)$.

15. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Respuestas.-

1. Mínimo absoluto en $(0,1)$.

2. Punto de ensilladura en $(0,1)$.

3. Punto de ensilladura en $(0,0)$.

4. Mínimo absoluto en cada punto de la recta $y = x + 1$.

5. Punto de ensilladura en $(1,1)$.

6. Mínimo absoluto en $(1,0)$.

7. Punto de ensilladura en $(0,0)$.

8. Punto de ensilladura en $(0, 6)$ y en $(x, 0)$, para todo x; mínimo relativo en $(0, y), 0 < y < 6$; máximo relativo en $(2, 3)$ y en $(0, y)$ para $y < 0$ e $y > 6$.

9. Punto de ensilladura en $(0, 0)$; mínimo relativo en $(1, 1)$.

10. Puntos de ensilladura en $(n\pi + \pi/2, 0)$, siendo n un entero.

11. Mínimo absoluto en $(0, 0)$; punto de ensilladura en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

12. Mínimo absoluto en $(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$; máximo absoluto en $(1, 3)$.

13. Máximo absoluto en $(\pi/3, \pi/3)$; mínimo absoluto en $(2\pi/3, 2\pi/3)$; máximo relativo en (π, π); mínimo relativo en $(0, 0)$; puntos de ensilladura en $(0, \pi)$ y $(\pi, 0)$.

14. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.

15. Máximo absoluto en cada punto de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$; mínimo absoluto en $(0, 0)$.

Ejercicio 39.-

Ajuste por mínimos cuadrados. Dados los puntos $(x_0, y_0) = (3, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, -3)$; $(x_2, y_2) = (5, 1)$ y $(x_3, y_3) = (7, 3)$.

1. Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos.

2. Hallar el polinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta a estos 4 puntos; en este caso, se debe buscar el mínimo de la función $E(a, b, c)$ de las variables a, b, c, dada por

$$E(a, b, c) := \sum_{i=0}^{3} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Respuestas.-

1. $y = 0{,}3500x - 0{,}6500$.

2. $a = 0{,}4375, b = -3{,}1500, c = 4{,}1625$.