Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Juan-Miguel Gracia

19 de junio de 2014

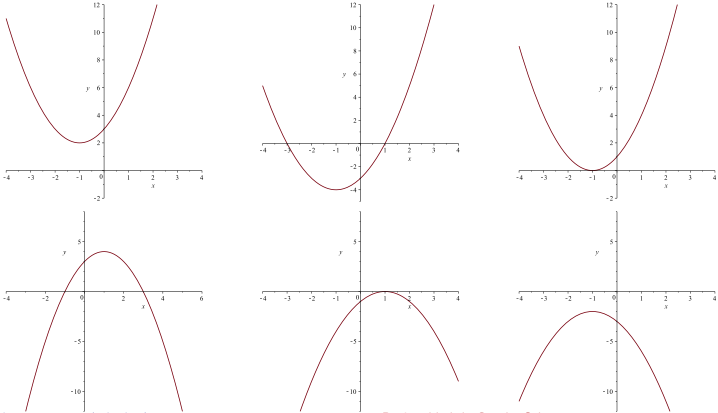
Polinomios de grado dos

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces el polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

puede tener ninguna raíz real, una raíz real, o dos raíces reales. En el caso de tener exactamente una raíz real, ésta es única; pero se le llama raíz doble.

La gráfica de la curva $y = p(x)$ tiene una de las formas siguientes



Polinomios de grado dos

La forma de la gráfica depende del *discriminante*

$$\Delta := b^2 - 4ac.$$

Así, si $\Delta > 0$ son posibles dos gráficas (¿cuáles?); si $\Delta = 0$ son posibles otras dos gráficas (¿cuáles?); si $\Delta < 0$ son posibles las dos gráficas restantes.

Si del polinomio $p(x)$ sabemos además que para todo x real se tiene que $p(x) \geq 0$, entonces las dos únicas gráficas posibles puden ser la primera y la tercera. La primera corresponde al caso en que $\Delta < 0$ y $a > 0$, y la tercera corresponde al caso en que $\Delta = 0$ y $a > 0$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Proposición 1

Para todos $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}})(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}).$$

Además, se da la igualdad

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})^2 = (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}})(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})$$

si y sólo si se cumple alguno de los tres casos siguientes: (1) o bien $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{0}}$; (2) o bien $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\mathbf{0}}$; (3) o bien $\vec{\boldsymbol{b}} = x_0 \vec{\boldsymbol{a}}$, siendo x_0 un número real.

DEMOSTRACIÓN. Como el producto escalar de un vector por sí mismo es mayor o igual a 0, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(x\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{a} + \vec{b}) \geq 0.$$

Haciendo operaciones,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} x^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} x + \vec{b} \cdot \vec{b} \geq 0.$$

Lamando

$$p(x) := \vec{a} \cdot \vec{a} x^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} x + \vec{b} \cdot \vec{b},$$

polinomio de grado 2 en x, como $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tendremos que la gráfica de $y = p(x)$ será como la primera o la tercera. Analicemos varios casos posibles. **Caso (1)**: Si $\vec{a} = \vec{0}$, la desigualdad $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$ se satisface trivialmente. **Caso (2)**: Lo mismo ocurre si $\vec{b} = \vec{0}$. **Caso (3)**: Supongamos a partir de ahora que $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Por tanto, $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$. Además, el discriminante de la ecuación $p(x) = 0$ viene dado por:

$$\Delta = 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}).$$

Dado que $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Delta \leq 0$. De donde se deduce que

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}).$$

Esto prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ahora nos falta demostrar las afirmaciones relativas al caso en que se dé la igualdad

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}).$$

Podemos desechar los casos $\vec{a}=\vec{0}$ o $\vec{b}=\vec{0}$ por triviales. En primer lugar, supongamos que existe un número real x_0 tal que $\vec{b}=x_0\vec{a}$; en este caso,

$$\vec{b}\cdot\vec{b} = (x_0\vec{a})\cdot(x_0\vec{a}) = x_0^2\,\vec{a}\cdot\vec{a},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(x_0\vec{a}) = x_0\,\vec{a}\cdot\vec{a}.$$

Por tanto,

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = x_0^2(\vec{a}\cdot\vec{a})^2,$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) = x_0^2(\vec{a}\cdot\vec{a})^2.$$

Es decir que $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})$.

Recíprocamente, supongamos que la última igualdad es cierta. Entonces $\Delta=0$, de donde $p(x)=0$ tiene una raíz doble e igual a

$$x_1 = \frac{-2\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\vec{a}\cdot\vec{a}} = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

Como $p(x_1) = 0$, deducimos que

$$\vec{a} \cdot \vec{a} x_1^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} x_1 + \vec{b} \cdot \vec{b} = 0.$$

Desandando las operaciones que hicimos al principio de la demostración, se sigue que

$$(x_1 \vec{a} + \vec{b}) \cdot (x_1 \vec{a} + \vec{b}) = 0.$$

Por consiguiente, $x_1 \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. De donde, $\vec{b} = -x_1 \vec{a}$.

$\square$