

Ejercicios sobre curvas de nivel,

Ejercicio 1.- Si las curvas de nivel de una función $f(x, y)$ son rectas, ¿es la superficie $z = f(x, y)$ un plano?

Ejercicio 2.- ¿Puede ocurrir que las curvas de nivel

$$f(x, y) = c_1, \quad f(x, y) = c_2,$$

con $c_1 \neq c_2$, tengan algún punto común?

Ejercicio 3.- ¿Pueden haber dos funciones distintas $f(x, y)$ y $g(x, y)$ que tengan las mismas curvas de nivel? Dicho de otra forma, ¿es posible la existencia de dos funciones diferentes $f(x, y)$ y $g(x, y)$ tales que para todo número real c_1 exista un c_2 real de manera que la curva $f(x, y) = c_1$ coincida con la curva $g(x, y) = c_2$, y viceversa?

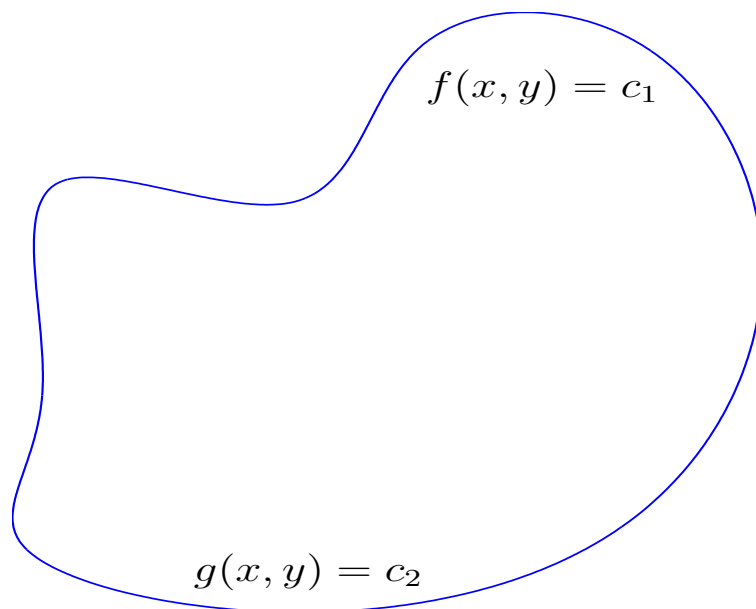


Figura 1: Curva de nivel de $f(x, y)$ y de $g(x, y)$.

Ejercicio 4.- Sea la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$$

¿Para qué valores de c es no vacía la curva de nivel $f(x, y) = c$? Demostrar que para esos valores de c , excepto para $c = 0$, la curva $f(x, y) = c$ es una circunferencia; hallar su centro y su radio en función de c . ¿Qué clase de línea es la curva $f(x, y) = 0$?

Ejercicio 5.- Decir cuales de los puntos siguientes $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 5)$, $(6, 5)$ y $(0, 0)$ están dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

Ejercicio 6.- La circunferencia de centro (a, b) y radio $r > 0$ tiene de ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Si desarrollamos esta ecuación se tiene

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

¿Es una circunferencia la curva de ecuación

$$x^2 + y^2 + x - y + 2 = 0?$$

Ejercicio 7.- ¿Es una circunferencia la curva de ecuación

$$3x^2 + 2xy + y^2 = c?$$

¿Para qué valores de c no tiene puntos la curva anterior?

Ejercicio 8.- Hallar la circunferencia de centro $(2, 1)$ que es tangente a la recta $x - y = 4$.

Ejercicio 9.- Hallar la circunferencia que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-1, 3)$ y su centro está situado en la recta $3x - y = 2$.

Ejercicio 10.- El punto $(3, -1)$ es el centro de una circunferencia que intercepta en la recta

$$2x - 5y + 18 = 0$$

una cuerda de longitud 6. Hallar la ecuación de esta circunferencia.