Máximos, mínimos y puntos de ensilladura

Definición.- Se dice que una función real $f(x, y)$, definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ tiene un *máximo absoluto* en un punto $(x_0, y_0) \in D$ si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \tag{1}$$

para todo $(x, y) \in D$. Al número $f(x_0, y_0)$ se llama *máximo absoluto de $f(x, y)$ en D*. Se dice que la función $f(x, y)$ tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0) si la desigualdad (1) se satisface para todo (x, y) de la intersección de un cierto entorno $B((x_0, y_0), \delta)$ de (x_0, y_0) con D.

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap D$.

Para $\delta > 0$, $B((x_0, y_0), \delta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta\}$.

Análogamente, se dice que $f(x, y)$ tiene un *mínimo relativo* en el punto (x_0, y_0) de D, si existe un entorno $B\Big((x_0, y_0), \delta\Big)$ de (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B\Big((x_0, y_0), \delta\Big) \cap D.$$

Otra terminología

global $\Leftrightarrow$ absoluto

local $\Leftrightarrow$ relativo

"Piensa . . . , pero actúa . . ."

Condición necesaria para máximo o mínimo relativo

Teorema 1.-*Si f(x,y) tiene un mínimo relativo en el punto* (x_0, y_0) *y admite derivadas parciales en ese punto, entonces*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Demostración.- Si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0), entonces $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ para todo número real x suficientemente próximo a x_0. Llamando $g(x) := f(x, y_0)$ resulta $g(x_0) \leq g(x)$ para $x \approx x_0$; lo que implica que $g'(x_0) = 0$. Pero, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Considerando la función $h(y) := f(x_0, y)$, se ve que $h(y)$ tiene un mínimo en y_0 y por tanto

$$0 = h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0).$$

$\square$

En general, si $f(x, y)$ tiene un mínimo (o máximo) relativo en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0;$$

es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{\mathbf{0}}$. Por otra parte, es sencillo encontrar ejemplos en los que la anulación de todas las derivadas parciales en (x_0, y_0) no implica necesariamente la existencia de un mínimo (o máximo) relativo en (x_0, y_0). Esto sucede en los llamados puntos de ensilladura.

Definición.- Supongamos que f sea diferenciable en (x_0, y_0). Si $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{\mathbf{0}}$ el punto (x_0, y_0) se llama *punto crítico (o estacionario)* de f. Un punto crítico se llama de *ensilladura (o de silla)* si **en todo** entorno $B((x_0, y_0), \delta)$ de (x_0, y_0) hay puntos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$ tales que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ y $f(x_2, y_2) > f(x_0, y_0)$.

Recordemos que si $f(x)$ es función de una sola variable real x, los puntos x_0 donde $f'(x_0) = 0$ se clasifican en máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Ejemplo 1.- *Máximo relativo*

$z = f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; $f'_x = -2x, f'_y = -2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 2 \geq 2 - (x^2 + y^2) = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 2.- *Mínimo relativo*

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$; $f'_x = 2x, f'_y = 2y \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ único punto crítico. $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y)$, $\forall (x,y)$.

Ejemplo 3.- *Punto de ensilladura*

$z = f(x,y) = xy$; $f'_x = y, f'_y = x \Rightarrow (0,0)$ único punto crítico.

$f(0,0) = 0$ y es obvio que existen puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tan próximos a $(0,0)$ como se desee tales que los números x_1 e y_1 tengan signos iguales y los números x_2 e y_2 tengan signos opuestos.

Ejemplo 4.- El ejemplo canónico.

$z = f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{(1-x^2-y^2)}$

$$f'_x = 2\,x e^{1-x^2-y^2} - 2\,x\left(x^2+3\,y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$$
$$= -2\,x e^{1-x^2-y^2}\left(-1+x^2+3\,y^2\right)$$

$$f'_y = 6\,y e^{1-x^2-y^2} - 2\,y\left(x^2+3\,y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$$
$$= -2\,y e^{1-x^2-y^2}\left(-3+x^2+3\,y^2\right)$$

Como $e^t > 0$ para todo $t \Rightarrow f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0$;

$f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0.$

<u>puntos críticos</u>

$$\begin{cases} -2\,x\left(-1+x^2+3\,y^2\right) = 0, \\ -2\,y\left(-3+x^2+3\,y^2\right) = 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 + x^2 + 3\,y^2 = 0, \\ -3 + x^2 + 3\,y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 3\,y^2 = 1, \\ x^2 + 3\,y^2 = 3. \end{cases} \qquad \text{¡imposible!: incompatible.}$$

Por tanto, si (x, y) es un punto crítico, tiene que ser $x = 0$ ó $y = 0$. Es evidente que $(x, y) = (0, 0)$ es una solución. Si $x = 0, y \neq 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -\,2\,y\left(-3 + 3y^2\right) &= 0, \\ -\,3 + 3y^2 &= 0, \\ -\,1 + y^2 &= 0, \\ y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1; &\Rightarrow (x, y) = (0, \pm 1) \end{aligned}$$

Si $x \neq 0, y = 0, \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -\,2\,x\left(-1 + x^2\right) &= 0, \\ -\,1 + x^2 &= 0, \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; &\Rightarrow (x, y) = (\pm 1, 0). \end{aligned}$$

Por lo que hay 5 puntos críticos:

$(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,0)$ y $(1,0)$.

Por la gráfica de $z = f(x,y)$ y el mapa de las curvas de nivel sabemos que: en $(0,0)$ hay un mínimo relativo, en $(0,-1)$ y en $(0,1)$ hay máximos relativos, y en $(-1,0)$ y $(1,0)$ hay puntos de ensilladura.

Pero, ¿qué podemos hacer cuando no dispongamos de estas gráficas? Respuesta: Utilizar el criterio dado en la Hoja 4–5 mediante el *determinante hessiano*.

Las derivadas parciales segundas de la función $f(x,y) = (x^2+3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$ del Ejemplo 4 son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(1 - 5\,x^2 - 3\,y^2 + 2\,x^4 + 6\,y^2x^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4 + x^2 + 3\,y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4\,xy\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(-4 + x^2 + 3\,y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\left(3 - 15\,y^2 - x^2 + 2\,y^2x^2 + 6\,y^4\right).$$

Por lo tanto, el determinante hessiano de $f(x,y)$ en cada uno de los 5 puntos críticos (x_0, y_0)

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

es

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 6\mathrm{e} \end{vmatrix}, A = 2\mathrm{e} > 0, \Delta = 12\mathrm{e}^2 > 0,$$

mínimo relativo.

$$\Delta(0,1) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}, A = -4 < 0, \Delta = 48 > 0,$$

máximo relativo.

$$\Delta(0,-1) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}, A = -4 < 0, \Delta = 48 > 0,$$

máximo relativo.

$$\Delta(-1,0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \Delta = -16 < 0,$$

punto de ensilladura,

$$\Delta(1,0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \Delta = -16 < 0,$$

punto de ensilladura.

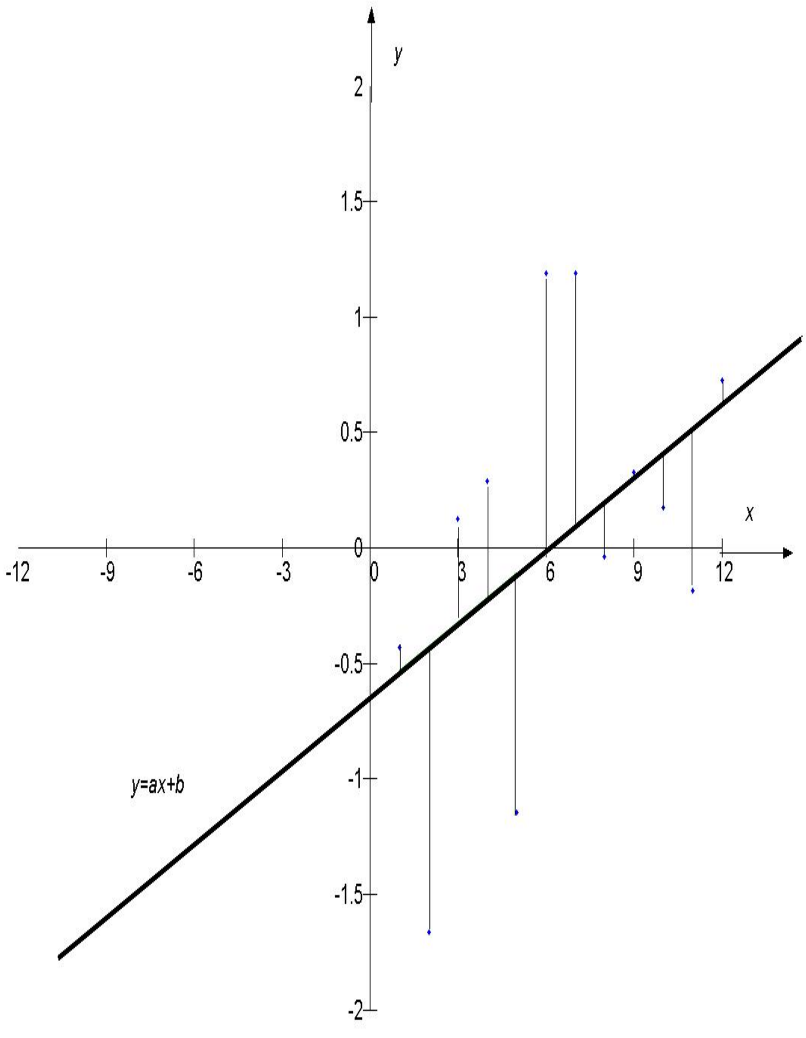
Ajuste por mínimos cuadrados

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales no todos iguales y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales cualesquiera.

Problema.- Hallar los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ en el sentido de los mínimos cuadrados. Es decir, buscar el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que hace mínimo el valor de la función

$$E(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

4–23



Solución.- $E(a,b) := \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) =$$

$$2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2n$$

Puntos críticos

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \tag{2}$$

Sean las medias

$\bar{x} := (\sum_{i=1}^n x_i)/n, \quad \bar{y} = (\sum_{i=1}^n y_i)/n;$

es decir, $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de los puntos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$. La ecuación segunda de (2) se puede reescribir como $a\bar{x} + b = \bar{y}$.

La solución de (2) viene dada por

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Este resultado para el valor de a puede deducirse usando la regla de Cramer para resolver el sistema (2) mediante cocientes de determinantes.

El determinante hessiano $\Delta(a,b)$ es igual a

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b}\right)^2 = 2n\left(2\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(2\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$
$$= 4\left\{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right\}.$$

Recordemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})^2 \le (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}})(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})$$

Tomando $\vec{\boldsymbol{e}} := (1,\ldots,1), \vec{\boldsymbol{x}} := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, se deduce que $(\vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}})^2 \le (\vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}})(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}})$. Lo que equivale a $\left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^n x_i^2$. **Por lo tanto,** $\Delta(a,b) \ge 0$.

Incluso más, como los $x_1, \ldots, x_n$ son *distintos* se tiene que $\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i\right)^2 < n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
En efecto, para *todo* t real se tiene que

$$(x_1 t + 1)^2 + \cdots + (x_n t + 1)^2 \geq 0.$$

Es decir,

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)t^2 + 2(x_1 + \cdots + x_n)t + n \geq 0,$$

o de manera equivalente,

$$At^2 + Bt + C \geq 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

llamando

$$\begin{cases} A & := x_1^2 + \cdots + x_n^2, \\ B & := 2(x_1 + \cdots + x_n), \\ C & := n. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$B^2 - 4AC \leq 0.$$

Esto quiere decir que

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) n \leq 0, \Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 0.$$

Si fuese

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

existiría un t_0 real y $\neq 0$ tal que

$$(x_1 t_0 + 1)^2 + \cdots + (x_n t_0 + 1)^2 = 0.$$

Lo que implicaría que

$$x_1 = \cdots = x_n = -\frac{1}{t_0}$$

¡imposible! pues los x_i no son todos iguales por hipótesis. $\Longrightarrow \Delta(a,b) > 0$.

Por lo tanto, el determinante $\Delta(a,b)$ es positivo; además el elemento de la posición 1,1 de $\Delta(a,b)$ es $\dfrac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$; por tanto la función $E(a,b)$ tiene un mínimo relativo en el punto crítico (a,b). Como $E(a,b)$ tiende a infinito cuando a y b tienden a infinito; este mínimo relativo es también mínimo absoluto (pues sólo hay un punto crítico).

Ejercicio 1.- Hallar la recta $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos dados por la tabla siguiente.

x_i	y_i
1	-0.4326
2	-1.6656
3	0.1253
4	0.2877
5	-1.1465
6	1.1909
7	1.1892
8	-0.0376
9	0.3273
10	0.1746
11	-0.1867
12	0.7258

Respuesta: $y = 0{,}1046x - 0{,}6340$.

Ejercicio 2.-

Sea $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el criterio del determinante hessiano. Deducir por observación de las curvas de nivel que $f(x, y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$.

Ejercicio 3.-

Sea $z = f(x, y) = x^2y^2$. Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico de $f(x, y)$. Comprobar que la matriz hessiana de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ es la matriz cero 2×2. Así pues, no es posible aplicar el criterio del determinante hessiano. Probar que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Ejercicio 4.-

Para cada una de las funciones siguientes identificar y clasificar los puntos estacionarios:

1. $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

2. $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$.

3. $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

4. $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

5. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.

6. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

7. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

8. $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$.

9. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

10. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$. El seno y el coseno hiperbólicos de t se definen así $\operatorname{sh} t := (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$, $\operatorname{ch} t := (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$. Es fácil verificar que $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t, (\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$.

11. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

12. $f(x,y) = (5x + 7y - 25)\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$.

13. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$.

14. $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, (x > 0)$.

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Respuestas.-

1. Mínimo absoluto en $(0, 1)$.

2. Punto de ensilladura en $(0, 1)$.

3. Punto de ensilladura en $(0, 0)$.

4. Mínimo absoluto en cada punto de la recta $y = x + 1$.

5. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.

6. Mínimo absoluto en $(1, 0)$.

7. Punto de ensilladura en $(0, 0)$.

8. Punto de ensilladura en $(0, 6)$ y en $(x, 0)$, para todo x; mínimo relativo en $(0, y), 0 < y < 6$; máximo relativo en $(2, 3)$ y en $(0, y)$ para $y < 0$ e $y > 6$.

9. Punto de ensilladura en $(0, 0)$; mínimo relativo en $(1, 1)$.

10. Puntos de ensilladura en $(n\pi + \pi/2, 0)$, siendo n un entero.

11. Mínimo absoluto en $(0, 0)$; punto de ensilladura en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

12. Mínimo absoluto en $(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$; máximo absoluto en $(1, 3)$.

13. Máximo absoluto en $(\pi/3, \pi/3)$; mínimo absoluto en $(2\pi/3, 2\pi/3)$; máximo relativo en (π, π); mínimo relativo en $(0, 0)$; puntos de ensilladura en $(0, \pi)$ y $(\pi, 0)$.

14. Punto de ensilladura en $(1, 1)$.

15. Máximo absoluto en cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; mínimo absoluto en $(0, 0)$.

Ejercicio 5.- Hallar la *recta* $y = ax + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(3, 2)$, $(3, -3)$, $(5, 1)$ y $(7, 3)$, en el sentido de los mínimos cuadrados. **Respuesta.-**

$$y = 0{,}8636x - 3{,}1364.$$

Ejercicio 6.- Hallar la *elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que mejor se ajusta a los cuatro puntos $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$ y $(-1, 2)$ en el sentido de los mínimos cuadrados. **Respuesta.-**

$$\frac{7}{11}x^2 + \frac{2}{11}y^2 = 1.$$

Ejercicio 7.- Hallar la *circunferencia*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que mejor se ajusta a los seis puntos $(2, 3)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$ y $(-1, 2)$ en el sentido de los mínimos cuadrados.