Ejercicio 1

Probar que la función

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{cuando } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{cuando } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(1) Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k^3/k^2}{k} = -1$$

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(1) Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^3/k^2}{k} = -1$$

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(2) Límite doble:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - 0 - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 - k^3 - h(h^2 + k^2) + k(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(2) Límite doble:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - 0 - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 - k^3 - h(h^2+k^2) + k(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(2) Límite doble:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - 0 - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 - k^3 - h(h^2+k^2) + k(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Solución

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) := 0.$$

(2) Límite doble:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - 0 - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3 - k^3 - h(h^2 + k^2) + k(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Solución

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2+kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Un límite direccional: $k=2h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4h^3+2h^3}{(h^2+4h^2)\sqrt{h^2+4h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{5h^2\sqrt{5h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{5\sqrt{5}|h|} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite direccional no existe. Por tanto, no existe el límite doble. Falla (2) y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Pero, ... ¿es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

Solución

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2+kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Un límite direccional: $k=2h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4h^3+2h^3}{(h^2+4h^2)\sqrt{h^2+4h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{5h^2\sqrt{5h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{5\sqrt{5}|h|} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite direccional no existe. Por tanto, no existe el límite doble. Falla (2) y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Pero, ... ¿es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

Solución

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Un límite direccional: $k = 2h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4h^3 + 2h^3}{(h^2+4h^2)\sqrt{h^2+4h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{5h^2\sqrt{5h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{5\sqrt{5}|h|} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite direccional no existe. Por tanto, no existe el límite doble. Falla (2) y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Pero, ... ¿es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

Solución

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2+kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Un límite direccional: $k = 2h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4h^3+2h^3}{(h^2+4h^2)\sqrt{h^2+4h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{5h^2\sqrt{5h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{5\sqrt{5}|h|} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite direccional no existe. Por tanto, no existe el límite doble. Falla (2) y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Pero, ...¿es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

Solución

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2 + kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Un límite direccional: $k = 2h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4h^3 + 2h^3}{(h^2+4h^2)\sqrt{h^2+4h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{5h^2\sqrt{5h^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2h}{5\sqrt{5}|h|} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite direccional no existe. Por tanto, no existe el límite doble. Falla (2) y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Pero, …¿es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?