

EJERCICIOS PARA EXÁMENES DE MATEMÁTICAS (CCAA Y CTA) Curvas de nivel

Juan-Miguel Gracia

25 de octubre de 2014

Ejercicio. Sea la función

$$f(x, y) := (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

Demostrar que:

- la curva de nivel $c = 3$ está formada por dos puntos.
- la curva de nivel $c = 5$ no tiene puntos.

Indicación.- Ésta es la función del *ejemplo canónico*.

Ejercicio. Consideremos la función

$$f(x, y) := x e^{-x^2-y^2}.$$

- Demostrar que la curva de nivel $c \geq 1$ de $f(x, y)$ no tiene puntos. Deducir que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x, y) \leq 1$.
- Hacer un esbozo de la curva de nivel $f(x, y) = 0,2$.
- Una curva de nivel de $f(x, y)$ es una línea recta. ¿Cuál es?
- Demostrar que la curva de nivel $f(x, y) = f(-1/\sqrt{2}, 0)$ sólo tiene un punto. ¿Cuál?
- Idem para $f(x, y) = f(1/\sqrt{2}, 0)$.

Ejercicio. Sea $f(x, y)$ una función definida en todo el plano \mathbb{R}^2 . Supongamos que $f(1, 1) = f(3, 4)$. Esto significa que el punto $(1, 1)$ está en la curva de nivel dada por la ecuación $f(x, y) = f(3, 4)$. *Explicar* esto con más detalle.