Ejercicios para exámenes de Matemáticas (CCAA y CTA) **Vectores**

Juan-Miguel Gracia

27 de octubre de 2014

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ vectores de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen

$$\|\vec{\boldsymbol{a}}\| = 10, \quad \|\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\| = 11, \quad \|\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}\| = 9.$$

Demostrar que existe un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{\boldsymbol{a}} = \beta\vec{\boldsymbol{b}}$ y hallarlo.

Ejercicio. ¿Cuánto vale en grados sexagesimales y en radianes el ángulo que forman las rectas

$$\begin{aligned} r_1 &: x = y, y = z, \\ r_2 &: y = z, x = 0? \end{aligned}$$

Ejercicio. Dados los puntos $(1, -1), (2, 3), (3, 4), (x_4, y_4)$ y la recta

$$y = \frac{71}{455}x + \frac{531}{455}$$

que mejor se ajusta a estos cuatro puntos en el sentido de los mínimos cuadrados, hallar x_4 e y_4.

Indicación.- Como ayuda se da la respuesta: $x_4 = 5,\ y_4 = 5/13$.

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ no nulos. Utilizando el Teorema de Pitágoras generalizado demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left\| \vec{\boldsymbol{a}} - \frac{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}{\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}\vec{\boldsymbol{b}} \right\| \leq \|\vec{\boldsymbol{a}} + x\vec{\boldsymbol{b}}\|.$$

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}$ cuatro vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que

$$(\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}})\vec{\boldsymbol{a}} - (\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}, \vec{\boldsymbol{a}})\vec{\boldsymbol{b}} + (\vec{\boldsymbol{d}}, \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{c}} - (\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}})\vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Deducir de aquí que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ son linealmente dependientes.

Explicación geométrica.- Sea π_1 el plano que contiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y sea π_2 el plano que contiene a $\vec{c}$ y $\vec{d}$. Llamemos r a la recta de corte de π_1 con π_2. Sea $\vec{v}$ un vector contenido en r. Entonces existen escalares $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ tales que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ y $\vec{v} = \delta\vec{c} + \gamma\vec{d}$. Por lo tanto, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \delta\vec{c} - \gamma\vec{d} = \vec{0}$. Hágase un dibujo adecuado.

Ejercicio. Demostrar la *identidad de Apolonio*

$$\|\vec{c} - \vec{a}\|^2 + \|\vec{c} - \vec{b}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 + 2\|\vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\|^2.$$

donde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio. Sean $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ y α_1, α_2 números reales tales que el vector $\vec{a} - (\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2)$ es ortogonal a $\vec{b}_1$ y a $\vec{b}_2$. Demostrar que

$$\|\vec{a}\| \geq \|\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2\| \quad (\textit{desigualdad de Bessel}).$$

Ejercicio. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tres vectores de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la igualdad

$$\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2.$$

¿Implica esta condición que los vectores son ortogonales a pares? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo poner un contraejemplo.

Indicación.- Es sabido que $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ si y sólo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ejercicio. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ positivos. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz demostrar que

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Ejercicio.

(1) Sean $\vec{a}, \vec{b}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$. Demostrar que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\| = \|\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}\|.$$

(2) Para cualquier par de vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, demostrar que

$$\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} - \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right\| = \frac{\|\vec{u} - \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Ejercicio. Dados vectores distintos de cero $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ de $\mathbb{R}^3$, demostrar que el vector $\vec{\boldsymbol{v}} := \|\vec{\boldsymbol{a}}\|\vec{\boldsymbol{b}} + \|\vec{\boldsymbol{b}}\|\vec{\boldsymbol{a}}$ biseca el ángulo entre $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$.

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que

$$\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\|^2 = \|\vec{\boldsymbol{a}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{b}}\|^2 - (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}})^2.$$

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Se llama *triple producto escalar* al número

$$(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}) := \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} & \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \\ \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} & \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \\ \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} & \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \end{vmatrix} = (\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}})^2.$$

Deducir de aquí que este determinante de orden 3 es ≥ 0. Este resultado generaliza que

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} \\ \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} & \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} \end{vmatrix} \geq 0.$$

¿Por qué es cierta esta última desigualdad?

Ejercicio. Demostrar la *identidad de Lagrange*: Cualesquiera que sean los números reales

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

En la suma de la derecha hay un sumando para cada par (i, j) de elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $i < j$. Después deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz a partir de la identidad de Lagrange.

Ejercicio. Para cualesquiera números reales

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$$

se puede demostrar que

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i z_i & \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}^2. \tag{1}$$

En la suma de la derecha hay un sumando para cada terna (i, j, k) de elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $i < j < k$. Se pide responder o demostrar las cuestiones siguientes:

(a) ¿En qué sentido es esta identidad una generalización de la identidad de Lagrange?

(b) La identidad (1) demuestra el determinante de la izquierda es ≥ 0.

(c) El determinante de la izquierda es > 0 si y sólo si los vectores $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}$ de $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, donde

$$\vec{\boldsymbol{x}} := (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{\boldsymbol{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \vec{\boldsymbol{z}} = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

(d) ¿Hay algún otro ejercicio en este repertorio estrechamente relacionado con éste?

Ejercicio. Sean $\vec{\boldsymbol{x}}_j := (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, vectores de $\mathbb{R}^n$ con $k \leq n$. Se puede demostrar que

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \\ \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} \begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2} & \cdots & x_{1j_k} \\ x_{2j_1} & x_{2j_2} & \cdots & x_{2j_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{kj_1} & x_{kj_2} & \cdots & x_{kj_k} \end{vmatrix}^2 . \tag{2}$$

En la suma de la derecha de (2) hay un sumando para k-tupla $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ de elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Si llamamos X a la matriz $k \times n$ cuyas k filas son los vectores $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix},$$

entonces en el segundo miembro de la igualdad (2) aparece la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k de la matriz X. Por tanto, si el rango de X es menor que k todos estos menores son iguales a cero; y las filas de X son linealmente dependientes. El recíproco también es cierto.

Por lo tanto, los vectores $\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_k \in \mathbb{R}^n$, $(k \leq n)$, son linealmente independientes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \\ \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_1 & \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{x}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_k \end{vmatrix} > 0.$$

¿En qué sentido son estos resultados una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de la identidad de Lagrange? Como ejercicio, escribir estos resultados para $k = 4$ y $n = 6$. ¿Qué otros ejercicios de este repertorio están emparentados con ellos?

Ejercicio. Sean $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ números reales. Demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Esto equivale a decir que

$$\overline{a}\,\overline{b} \leq \overline{ab},$$

siendo $\overline{a}$ la media de los a_i, $\overline{b}$ la media de los b_i y $\overline{ab}$ la media de los productos $a_i b_i$. ¿Qué relación guarda esta desigualdad con la covarianza?

Indicación.- Inténtese demostrar por inducción sobre $n \geq 2$ que

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Una vez hecho esto, la desigualdad es evidente pues $a_i \geq a_j$, y $b_i \geq b_j$ siempre que $i < j$.