Matemáticas

19 de diciembre de 2013
Examen orientativo tercero
Cada uno de los cuatro ejercicios puntúa igual: 2,5

Ejercicio 1.- Demostrar que la curva C

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ xy + xz = 2, \end{cases}$$

es tangente a la superficie S

$$xyz - x^2 - 6y = -6$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

Es decir, hay que demostrar que la recta tangente a la curva C en el punto $(1, 1, 1)$ está contenida en el plano tangente a la superficie S en el punto $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 2.- Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo punto del plano $\mathbb{R}^2$. Sea (x_0, y_0) un punto dado y (a, b) un vector no nulo. Consideremos la función auxiliar

$$\varphi(t) := f(x_0 + ta, y_0 + tb), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que la gráfica de $\varphi(t)$ viene dada por la Figura 1. Definamos el punto $(x_1, y_1) := (x_0 + t_0 a, y_0 + t_0 b)$. Utilizando la regla de la cadena, demostrar que la recta que une los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es tangente en el punto (x_1, y_1) a la curva de nivel $f(x, y) = f(x_1, y_1)$.

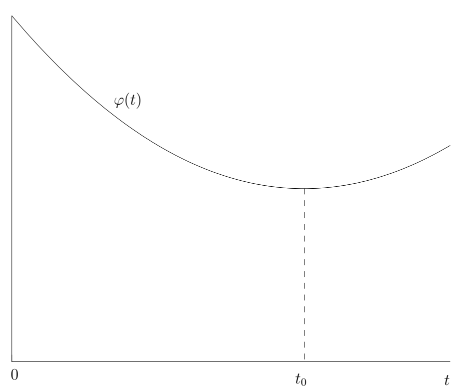

Figura 1: Gráfica de $\varphi(t)$.

Ejercicio 3.- Sea $f(x, y)$ una función tal que

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 6x)\vec{\imath} + (6xy - 6y)\vec{\jmath} \tag{1}$$

Hallar los puntos críticos de $f(x, y)$ y averiguar su naturaleza (máximo relativo, mínimo relativo, punto de ensilladura) mediante el criterio del determinante hessiano.

Aunque hay infinitas funciones $f(x, y)$ que satisfacen la condición (1), ¿por qué las respuestas anteriores son las mismas para todas ellas? Explicarlo.

Ejercicio 4.- Hallar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que mejor se ajusta a los cuatro puntos $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$ y $(-1, 2)$ en el sentido de los mínimos cuadrados.