Matemáticas

23 de noviembre de 2013
Examen orientativo
Cada uno de los cuatro ejercicios puntúa igual: 2,5

Ejercicio 1.- Sean $\vec{\boldsymbol{a}} := (1, 0, 1, 0, \sqrt{2})$ y $\vec{\boldsymbol{b}} := (\sqrt{2}, 1, -1, -1, \sqrt{2})$ vectores de $\mathbb{R}^5$. Hallar los valores reales de x para los que $2 \leq \|\vec{\boldsymbol{a}} + x\vec{\boldsymbol{b}}\| \leq 3$.

Ejercicio 2.- Sean las funciones

$$f(x, y) := \frac{x + y}{x - y}, \quad g(x, y) := \frac{xy}{(x - y)^2},$$

cuyo dominio de definición D es todo $\mathbb{R}^2$ menos la recta $y = x$.

(1) Demostrar que $4g(x, y) = f(x, y)^2 - 1$.

(2) Establecer la relación entre las curvas de nivel de $f(x, y)$ y de $g(x, y)$.

(3) Demostrar que para todo $(x, y) \in D$ los vectores $\nabla f(x, y)$ y $\nabla g(x, y)$ son proporcionales (o linealmente dependientes). Es decir, que existe una función real (o escalar) $\varphi(x, y)$ tal que

$$\nabla g(x, y) = \varphi(x, y)\nabla f(x, y).$$

¿Qué tiene que ver esta igualdad con lo establecido en el punto (2)? Hallar $\varphi(x, y)$.

Ejercicio 3.- Sea $g(t)$ una función derivable de una variable real t. Se pide encontrar $g(t)$ para que el campo vectorial

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x, y) := g(x^2 + y)\, \vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(\frac{x^3}{3} + xy + y^3\right) \vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

sea un gradiente. Después hallar una función $f(x, y)$ tal que $\nabla f(x, y) = \vec{\boldsymbol{F}}(x, y)$ y $f(1, 1) = 4$.

Ejercicio 4.- En el mapa de curvas de nivel de una función $f(x, y)$, se ha dibujado además un vector unitario $\vec{\boldsymbol{u}}$ indicado en color rojo; véase la Figura 1.

1. Señalar el punto o puntos P_0 donde $f(P_0) = -10$ y $f'(P_0, \vec{\boldsymbol{u}}) = 0$.
2. ¿Es $f'(Q_1, \vec{\boldsymbol{u}}) > 0, = 0, < 0$?
3. ¿Es $f'(Q_2, \vec{\boldsymbol{u}}) > 0, = 0, < 0$?

Razonar brevemente las respuestas.

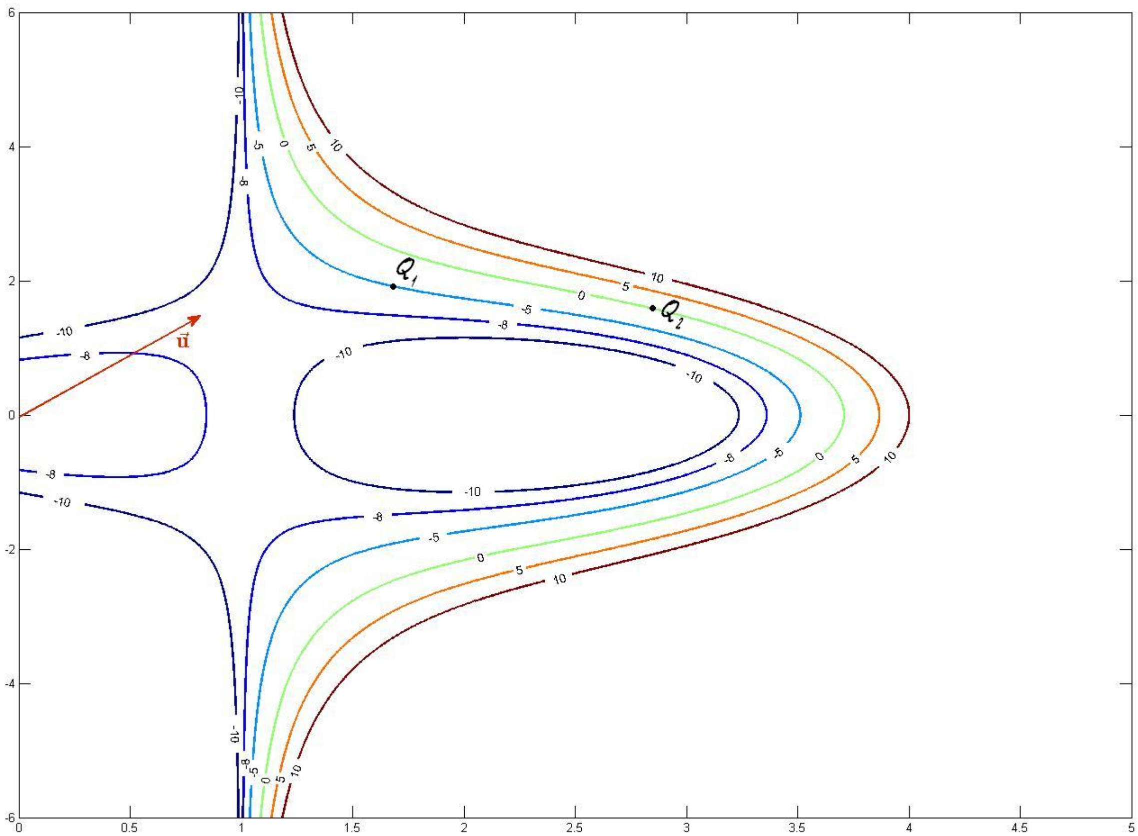

Figura 1: Mapa de curvas de nivel y vector unitario.