Matemáticas de 1º de CTA y CCAA

8 de noviembre de 2014
Examen orientativo sobre lo explicado hasta el día de la fecha

Ejercicio 1 (2,5 puntos) Sea $\varphi(t)$ la función que a cada $t \in \mathbb{R}$ le asocia el valor

$$\varphi(t) := \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Sea $f(x, y)$ la función

$$f(x, y) := \varphi\big((y - x^2)(y - 2x^2)\big)$$

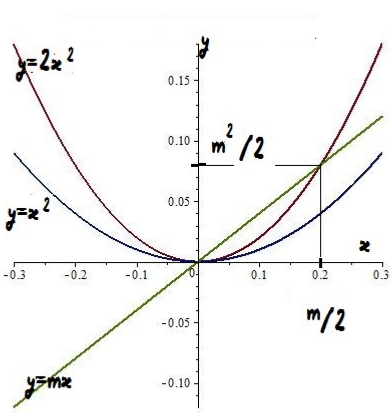
Probar que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

no existe a pesar de que todos sus límites direccionales existen y valen 1.

Indicación.- Primero representar las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$. Segundo probar que toda recta que pase por el origen, excepto el eje x, tiene puntos situados en la zona $y > 2x^2$ tan cercanos a $(0, 0)$ como se quiera.

Solución.-



Veamos un argumento que prueba el punto segundo. Sea $y = mx$ una recta con pendiente $m \neq 0$; sin pérdida de generalidad supongamos que $m > 0$. Hallemos los puntos de corte de esta recta con la curva $y = 2x^2$. Es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = mx, \\ y = 2x^2. \end{cases}$$

De $2x^2 = mx$, se sigue que $2x^2 - mx = 0$; $x(2x - m) = 0$; de donde $x = 0$ o $2x - m = 0$. Por tanto $x = 0$ y $x = m/2$ son las soluciones. Los valores de y correspondientes son $y = 0$ e $y = m^2/2$, respectivamente. Ahora bien si $0 < x < m/2$, entonces $x^2 < mx/2$. Por lo cual, $2x^2 < mx$. Es decir, la recta $y = mx$ queda por encima de la parábola $y = 2x^2$ en el intervalo $(0, m/2)$. Es obvio que $y = x^2$ queda por debajo de $y = 2x^2$:

$$\forall x \in (0, m/2) \quad \Longrightarrow \quad x^2 < 2x^2 < mx.$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos) ¿Cuál de las rectas

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x - 4y + z = -1, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 0, \\ -x + y + z = 1; \end{cases}$$

pasa más cerca del origen? Razónese.

Indicación.- Encontrar primero unas ecuaciones paramétricas de las rectas. Después hallar el mínimo valor de la distancia a $(0,0,0)$.

Ejercicio 3 (2,5 puntos) Una función $f(x, y)$, que está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, satisface las dos condiciones siguientes:

- $f(x, 0) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Hallar los valores $f(\pi/2, 2)$, $f(\pi, 3)$, $f(x, 1)$.

Solución.- Sea x_0 un número real cualquiera. Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, se tiene que la función $y \mapsto f(x_0, y)$ es constante; es decir, $f(x_0, y) = C$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Sea otro x_1. Como la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto f(x_1, y)$ es constante; es decir $f(x_1, y) = K$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

¿Serán iguales C y K? No necesariamente. En principio C depende de x_0 y K depende de x_1. Es decir, que estas constantes *dependen* de x.

Por tanto, al ser $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x, y) = c(x), \forall y \in \mathbb{R}$, donde la "constante" $c(x)$ puede depender de x.

Por lo tanto,

$f(x, 0) = c(x) = f(x, 1)$. Igualmente, $f(\pi/2, 2) = c(\pi/2)$, $f(\pi, 3) = c(\pi)$.

Sólo nos falta conocer la función $c(x)$ para acabar el ejercicio. Como $c(x) = f(x, 0) = \operatorname{sen} x$, tendremos que $f(x, 1) = c(x) = \operatorname{sen} x, f(\pi/2, 2) = c(\pi/2) = \operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $f(\pi, 3) = c(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos) Si $u(x, y) = v(xy)$, donde $v(t)$ es una función derivable de $t \in \mathbb{R}$, demostrar que u satisface la ecuación en derivadas parciales

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Hallar la función $u(x, y) := v(xy)$ tal que $u(x, x) = x^4 \mathrm{e}^{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.- La regla de la cadena nos asegura de que si $f(x)$ es una función de $x \in \mathbb{R}$ derivable en x_0 y si $g(y)$ es una función de $y \in \mathbb{R}$ derivable en $y_0 := f(x_0)$, entonces la función compuesta $h(x) := g\big(f(x)\big)$ es derivable en x_0 y

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0).$$

Por lo tanto, $u'_x(x,y) = yv'(xy), \quad u'_y(x,y) = xv'(xy)$. De donde

$$x\,u'_x(x,y) - y\,u'_y(x,y) = xyv'(xy) - yxv'(xy) = (xy - yx)v'(xy) = 0 \cdot v'(xy) = 0.$$

Esto demuestra la parte primera. Para hallar la función $u(x,y) = v(xy)$ tal que $u(x,x) = x^4\mathrm{e}^{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que

$$u(x,x) = v(x^2).$$

Por tanto, $v(x^2) = x^4\mathrm{e}^{x^2}$. Dado que $x^4 = (x^2)^2$, tenemos que $v(x^2) = (x^2)^2\mathrm{e}^{x^2}$. Esto nos sugiere que la $v(t)$ buscada debe ser

$$v(t) = t^2\mathrm{e}^t;$$

por consiguiente,

$$u(x,y) = v(xy) = x^2y^2\mathrm{e}^{xy}.$$