Matemáticas

8 de octubre de 2014
Examen orientativo sobre lo explicado hasta el día de la fecha

Ejercicio 1 (2,5 puntos) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ sean $\vec{\boldsymbol{a}} \neq \vec{\boldsymbol{b}}$. Demostrar que el subconjunto de puntos $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{a}}\| = 2\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{b}}\|$$

es una hiperesfera de centro

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \frac{4}{3}\vec{\boldsymbol{b}} - \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{a}}$$

y radio

$$r = \frac{2}{3}\|\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{a}}\|.$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos) Dados dos vectores $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{\boldsymbol{b}}$ es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{a}}$ y un escalar k, demuestre que existe una solución $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ común a las ecuaciones

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = k, \quad \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

y que es única. Se pide también encontrarla.

¿Qué pasa en el caso de que $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}$ no sean perpendiculares?

Ejercicio 3 (2,5 puntos) Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una sucesión finita de números reales con al menos dos términos distintos. Utilizando la desigualdad de Cauchy–Schwarz demuestre que

$$\overline{x}^2 < \overline{x^2},$$

donde

$$\overline{x} := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad \text{es la media}$$

y

$$\overline{x^2} := \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \qquad \text{es la media de los cuadrados.}$$

Una solución del Ejercicio 3.- Llamemos $\vec{\boldsymbol{u}}$ al vector $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{\boldsymbol{x}} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}})^2 \leq (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}})(\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}).$$

Como

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} &= 1 + 1 + \cdots + 1 = n, \\
\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,
\end{aligned}$$

se tiene que
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \le n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$
Dividiendo ambos miembros de esta desigualdad por n^2 queda
$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n^2} \le \frac{n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{n^2};$$
por lo que
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}.$$
Esto es
$$\overline{x}^2 \le \overline{x^2}.$$
Pero no puede darse la igualdad $\overline{x}^2 = \overline{x^2}$. Pues, si así fuera, tendríamos que $(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})^2 = (\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})(\vec{\boldsymbol{x}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}})$; por lo que existiría un escalar real α tal que $\vec{\boldsymbol{x}} = \alpha\vec{\boldsymbol{u}}$. Lo que implicaría que
$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\alpha,\alpha,\ldots,\alpha),$$
y todos los números $x_1,x_2,\ldots,x_n$ serían iguales (a α). Lo cual, por hipótesis es imposible. Por consiguiente,
$$\overline{x}^2 < \overline{x^2}.$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos) Hallar la elipse
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
que mejor se ajusta a los puntos $(x_i,y_i), i=1,2,\ldots,10$, donde
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{x}} &= (x_1,x_2,\ldots,x_{10}) := (-5,-4,-4,-1,2,3,3,0,4,5),\\ \vec{\boldsymbol{y}} &= (y_1,y_2,\ldots,y_{10}) := (-1,2,1,-3,2,-2,2,3,-2,1),\end{aligned}$$
en el sentido de los mínimos cuadrados.

Indicación.- Solución $a=5{,}0602, b=2{,}8753$.

Una solución del Ejercicio 4.- Llamando $\alpha=\frac{1}{a^2}$, $\beta=\frac{1}{b^2}$ la ecuación de la elipse buscada se puede escribir así: $\alpha x^2+\beta y^2=1$; o $\alpha x^2+\beta y^2-1=0$. Debemos hallar los valores reales de α,β que hagan mínima la función
$$E(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^{10}(\alpha x_i^2+\beta y_i^2-1)^2 = \sum_{i=1}^{10}(1-\alpha x_i^2-\beta y_i^2)^2.$$
Como $E(\alpha,\beta)$ es una suma de 10 cuadrados, es la norma al cuadrado de un vector de $\mathbb{R}^{10}$. Ese vector es
$$(1-\alpha x_1^2-\beta y_1^2, 1-\alpha x_2^2-\beta y_2^2,\ldots,1-\alpha x_{10}^2-\beta y_{10}^2).$$

Denotando por

$$\vec{\boldsymbol{u}} := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^{10}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} := (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{10}^2), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} := (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{10}^2),$$

se tiene que

$$E(\alpha,\beta) = \|\vec{\boldsymbol{u}} - \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} - \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}}\|^2$$

Por el Teorema de la hoja 1-45 para hallar los α y β que hagan mínima $E(\alpha,\beta)$ debemos buscarlos para que el vector $\vec{\boldsymbol{u}}-(\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}}+\beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}})$ sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}}$. Es decir, α y β deberán satisfacer las ecuaciones

$$\begin{cases} (\vec{\boldsymbol{u}} - \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} - \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} = 0, \\ (\vec{\boldsymbol{u}} - \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} - \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = 0, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} + \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}}, \\ \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} + \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}}, \end{cases}$$

Como $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} = \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = \vec{\boldsymbol{y}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}}$, el sistema a resolver queda

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} + \beta\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}, \\ \alpha\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} + \beta\overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = \vec{\boldsymbol{y}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}}, \end{cases}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} &= (25, 16, 16, 1, 4, 9, 9, 0, 16, 25) \\ \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} &= (1, 4, 1, 9, 4, 4, 4, 9, 4, 1) \\ \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} &= 25 + 16 + 16 + 1 + 4 + 9 + 9 + 0 + 16 + 25 \\ \vec{\boldsymbol{y}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}} &= 1 + 4 + 1 + 9 + 4 + 4 + 4 + +9 + 4 + 1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} = 2197, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = 296, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{y^2}} = 245,$$
$$\vec{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = 121, \quad \vec{\boldsymbol{y}} \cdot \vec{\boldsymbol{y}} = 41.$$

$$\begin{cases} 2197\alpha + 291\beta &= 121, \\ 291\alpha + 245\beta &= 41. \end{cases}$$

De donde,

$$\alpha_0 = \frac{8857}{226792}, \quad \beta_0 = \frac{27433}{226792}$$

Y, por consiguiente,

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_0}} = 5,0602, \quad b_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta_0}} = 2,8553.$$