Matemáticas de 1º de CTA y CCAA

9 de diciembre de 2014
Examen orientativo sobre lo explicado hasta el día de la fecha

Ejercicio 1 (2,5 puntos) Las Figuras 1 y 2 nos muestran algunas curvas de nivel de una función $f(x,y)$ y la gráfica de una función auxiliar $\varphi(t) := f(x_0 + at, y_0 + bt)$, respectivamente. Se pide ubicar aproximadamente el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y el vector $\vec{v} = (a,b)$. Razónese.

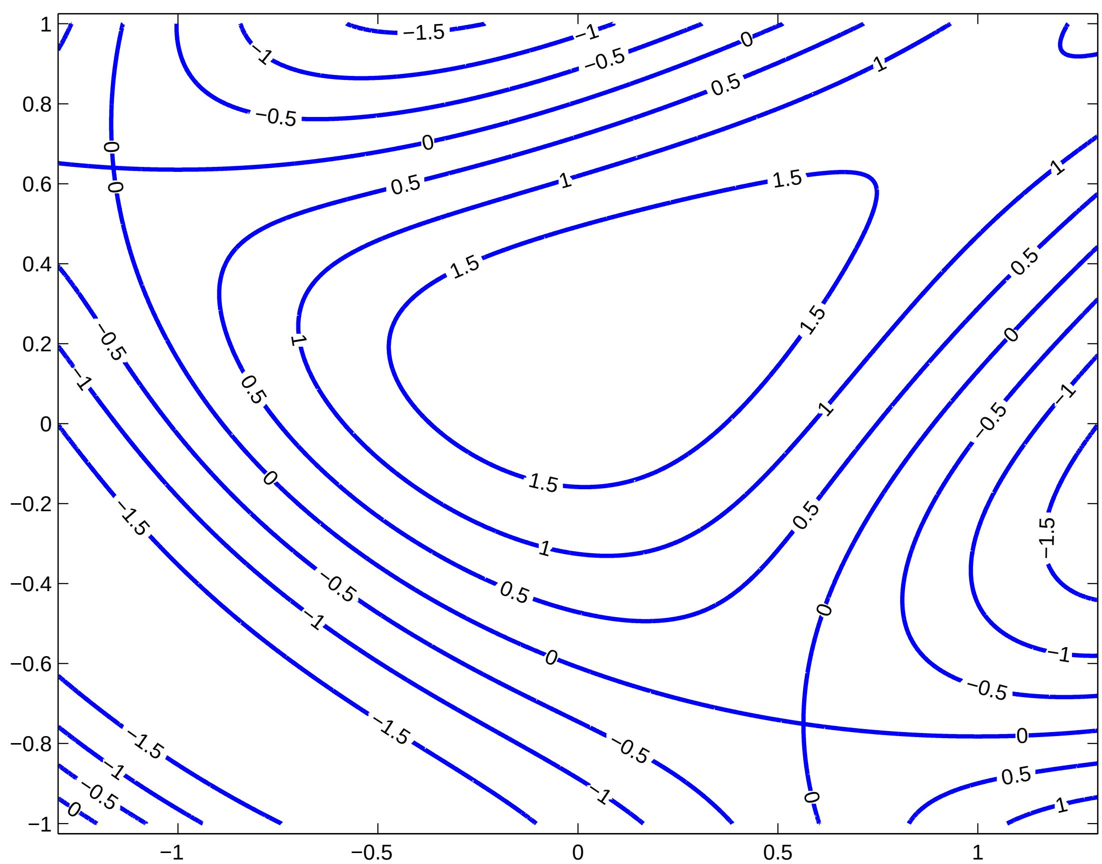

Figura 1: Mapa de curvas de nivel de una función $f(x,y)$.

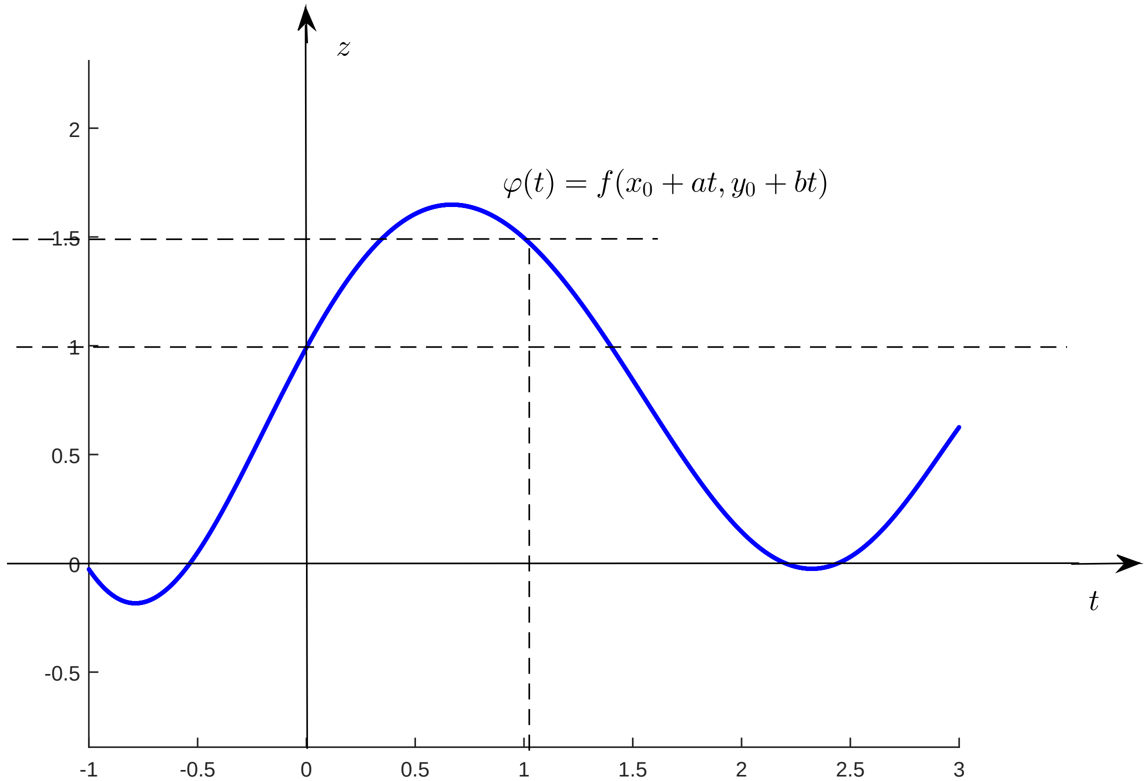

Figura 2: Función auxiliar $\varphi(t) := f(x_0 + at, y_0 + bt)$.

Ejercicio 2 (2,5 puntos) Demostrar que la función

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y} & \text{si } x \neq y, \\ \cos x & \text{si } x = y, \end{cases}$$

es continua en todo punto (x_0, x_0) para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Indicación.- El teorema del valor medio nos dice que si $g(t)$ es una función de una variable real t, definida y continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe al menos un punto $t_0 \in (a,b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(t_0).$$

Para todos x, y números reales existe un número real $z(x,y)$ entre ellos tal que

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y} = \cos z(x,y).$$

Si x e y tienden a x_0, entonces $z(x,y)$ tiende a x_0. Por tanto

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \cos z(x,y) = \cos x_0.$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos) Sea $f(x,y)$ la función definida por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^6}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(b) Probar que $f(x,y)$ admite todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ y calcularlas.

(c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

Solución.- (a) $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$: véase lo que ocurre sobre la curva $y = x^2$. Figura 3

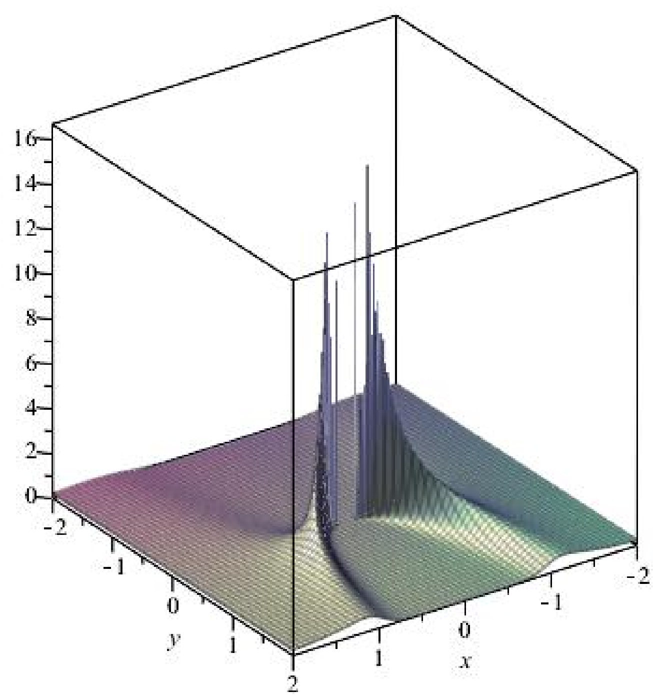

Figura 3: Superficie $z = f(x,y)$.

(b) Sea $\vec{\boldsymbol{u}} = (a,b)$ un vector unitario. Vamos a probar que $f'\big((0,0),\vec{\boldsymbol{u}}\big)$ existe y vale 0. La demostración es fácil si Caso 1: $a = 0$. Supongamos que Caso 2:

$a \neq 0$. Entonces,

$$f'\big((0,0),\vec{\boldsymbol{u}}\big) = f'\big((0,0),(a,b)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^6a^6}{(hb-h^2a^2)^2+h^8a^8}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^6a^6}{h^2b^2-2h^3a^2b+h^4a^4+h^8a^8}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^6a^6}{h^3b^2-2h^4a^2b+h^5a^4+h^9a^8}$$

Subcaso 2.1: Sea $b \neq 0$. Simplificando h^3, queda

$$f'\big((0,0),(a,b)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3a^6}{b^2-2ha^2b+h^2a^4+h^6a^8} = \frac{0}{b^2} = 0.$$

Subcaso 2.2: Si $b = 0$, nos queda

$$f'\big((0,0),(a,b)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{h^6a^6}{h^5a^4+h^9a^8} = \lim_{h\to 0} \frac{ha^6}{a^4+h^4a^8} = \frac{0}{a^4} = 0.$$

(c) Como no es continua en $(0,0)$, no puede ser diferenciable en ese punto.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Sea la función

$$f(x,y) := x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

(a) Hallar sus puntos críticos.

(b) Averiguar si son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

(c) Hallar su máximo absoluto y su mínimo absoluto. Razónese.

(d) Una curva de nivel de esta función es una recta. ¿Cuál es?

(e) Demostrar que la curva de nivel c de $f(x,y)$ donde $c \geq 1$ no tiene puntos. Deducir que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x,y) \leq 1$.