Solución del Ejercicio 2
del examen orientativo segundo, del 23 de noviembre de 2013. Versión final

Juan-Miguel Gracia

27 de noviembre de 2013

Este texto se modificará según vaya escribiendo la respuesta.

Ejercicio 2.- Sean las funciones

$$f(x,y) := \frac{x+y}{x-y}, \quad g(x,y) := \frac{xy}{(x-y)^2},$$

cuyo dominio de definición D es todo $\mathbb{R}^2$ menos la recta $y = x$.

(1) Demostrar que $4\,g(x,y) = f(x,y)^2 - 1$.

(2) Establecer la relación entre las curvas de nivel de $f(x,y)$ y de $g(x,y)$.

(3) Demostrar que para todo $(x,y) \in D$ los vectores $\nabla f(x,y)$ y $\nabla g(x,y)$ son proporcionales (o linealmente dependientes). Es decir, que existe una función real (o escalar) $\varphi(x,y)$ tal que

$$\nabla g(x,y) = \varphi(x,y)\nabla f(x,y).$$

¿Qué tiene que ver esta igualdad con lo establecido en el punto (2)? Hallar $\varphi(x,y)$.

Solución breve

(1)

$$4\,g(x,y) = \frac{4xy}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} - 1 = f(x,y)^2 - 1.$$

(2) Antes de todo, la respuesta intuida: *Cada curva de nivel de $f(x,y)$ es una recta, y cada curva de nivel de $g(x,y)$ está formada por un par de rectas. Cada recta de este par es una curva de nivel de $f(x,y)$. A todas estas rectas* *debemos quitarles el punto* $(0,0)$ *y deben estar contenidas en* D*. O sea, la recta* $y = x$ *queda excluida.*

Averiguar la relación entre las curvas de nivel de $f(x,y)$ y las de $g(x,y)$ es algo más problemático, aunque es una consecuencia inmediata de la igualdad

$$4\,g(x,y) = f(x,y)^2 - 1. \tag{1}$$

Para cada valor c de la función $f(x,y)$, la curva de nivel c de $f(x,y)$ forma parte de la curva de nivel $\frac{c^2-1}{4}$ de $g(x,y)$. Es decir,

$$\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\} \subset \left\{(x,y) \in D \mid g(x,y) = \frac{c^2-1}{4}\right\}.$$

La ecuación (1) liga estrechamente los valores de $f(x,y)$ con los de $g(x,y)$. Ahí reside la clave del asunto. No está demás recordar la definición de *curva de nivel* c o *conjunto de nivel* c de $f(x,y)$, siendo c un valor de $f(x,y)$:

$$\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}.$$

Tras haber pensado un buen rato, sobre estas curvas, caemos en la cuenta de que es oportuno conocer los valores de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$. Empezaremos por los valores de $f(x,y)$: Si (x_0,y_0) es un punto de D "próximo" a la recta $y = x$, el denominador que aparece en $f(x,y)$ es "casi" 0; por tanto el cociente

$$f(x_0,y_0) = \frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}$$

será "muy grande". Es decir, $x_0 \simeq y_0$; por consiguiente, tendrán igual signo. Este será el signo de $f(x_0,y_0)$. Se infiere de aquí que $f(x_0,y_0)$ puede ser un número real muy grande, positivo o negativo. Si $(x_1,y_1) \in D$ y $x_1 + y_1 = 0$, entonces $f(x_1,y_1) = 0$. Ahora falta, demostrar lo aquí intuido; a saber, que el conjunto de valores de $f(x,y)$ es toda la recta real $\mathbb{R}$. Sea M *cualquier* número real. Vamos a demostrar que M es un valor de $f(x,y)$. Para ello escribimos

$$\frac{x+y}{x-y} = M,$$

y estudiaremos si esta curva tiene puntos. Esta curva es una recta; a saber, la recta de ecuación $x + y = M(x-y)$; desarrollando,

$$\begin{aligned}
x + y &= Mx - My,\\
(1-M)x &= -(M+1)y,\\
\frac{1-M}{-M-1}x &= y,
\end{aligned}$$

de donde
$$y = \frac{M-1}{M+1}x;$$
Tomemos un $x_0 \neq 0$, entonces el punto
$$\left(x_0, \frac{M-1}{M+1}x_0\right)$$
pertenece a esta recta y a D. Además,
$$f\left(x_0, \frac{M-1}{M+1}x_0\right) = M.$$
$\square$

No es tán fácil averiguar el conjunto de valores de la función $g(x, y)$. Unos cálculos previos con (1) nos hacen prever que $d \in \mathbb{R}$ es un valor de esta función si y sólo si $d \in [-1/4, \infty)$. Para cualquier $(x_1, y_1) \in D$ tenemos que
$$\begin{aligned} 4\,g(x_1, y_1) + 1 &= f(x_1, y_1)^2, \\ g(x_1, y_1) + \frac{1}{4} &= \frac{f(x_1, y_1)^2}{4}. \end{aligned}$$
De donde se sigue
$$\begin{aligned} g(x_1, y_1) + \frac{1}{4} &\geq 0, \\ g(x_1, y_1) &\geq -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$
¿Es alcanzable el valor $-1/4$ por la función $g(x, y)$? Busco puntos $(x, y) \in D$ tales que
$$g(x, y) = \frac{xy}{(x-y)^2} = -\frac{1}{4}.$$
Haciendo sucesivas operaciones,
$$\begin{aligned} xy &= \frac{-(x-y)^2}{4}, \\ 4xy + (x-y)^2 = 0; \end{aligned}$$
tomo $x := 1$, y me queda
$$\begin{aligned} 4y + (1-y)^2 &= 0, \\ 4y + 1 - 2y + y^2 &= 0, \\ y^2 + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$
Por lo que,
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1.$$

Así pues, el punto $(1,-1)$ satisface que $g(1,-1) = -1/4$ y $(1,-1)$ pertenece a D pues no está en la recta $y = x$. La respuesta a la pregunta es sí.

Resumiendo, la solución a la parte (2) de este ejercicio es:

(a) Para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\} \cup \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = -c\} = \left\{(x,y) \in D \mid g(x,y) = \frac{c^2-1}{4}\right\}.$$

(b) Para todo $d \in [-1/4, \infty)$,

$$\{(x,y) \in D \mid g(x,y) = d\} = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = \sqrt{4d+1}\} \cup \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = -\sqrt{4d+1}\}.$$

(3) Comencemos hallando las derivadas parciales de $f(x,y)$ y de $g(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y(x+y)}{(x-y)^3}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x(x+y)}{(x-y)^3}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla g(x,y) = \frac{x+y}{2(x-y)} \left(\frac{-2y}{(x-y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y}{x-y} \nabla f(x,y).$$

En consecuencia,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2} f(x,y).$$

¿Qué tiene que ver esta igualdad con lo establecido en el punto (2)? Ya que el gradiente de una función en un punto (x_0, y_0) es *perpendicular* a la curva de nivel que pasa por ese punto. Supongamos que $c_0 := f(x_0, y_0)$. Por lo ya demostrado con anterioridad, $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel

$$\{(x,y) \mid f(x,y) = c_0\}$$

en (x_0, y_0); el vector $\nabla g(x_0, y_0)$ es perpendicular a

$$\{(x,y) \mid g(x,y) = \frac{c_0^2 - 1}{4}\},$$

en (x_0, y_0) y, como

$$\{(x,y) \mid f(x,y) = c_0\} \subset \{(x,y) \mid g(x,y) = \frac{c_0^2 - 1}{4}\},$$

se tiene que los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales a la recta tangente a dichas curvas en ese punto. Dado que la recta tangente es la misma para ambas curvas, los vectores gradientes son proporcionales.