Matemáticas de 1º de CTA y CCAA

20 de enero de 2015
Posible examen final.
Modificado ligeramente el día 31 de diciembre de 2014

Ejercicio 1 (2 puntos) Sean $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\|\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\| = 3, \quad \|\vec{\boldsymbol{a}}-2\vec{\boldsymbol{b}}\| = 4, \quad \|2\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\| = 6.$$

Se pide hallar el área del triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$, donde

$$P := \vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}, \quad Q := \vec{\boldsymbol{a}}-2\vec{\boldsymbol{b}} \quad \text{y} \quad R := 2\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}.$$

Solución: área $= 4{,}3333$.

Indicación.- Para hallar el área del triángulo se puede usar también la fórmula de Herón, que dice que si α, β, γ son las longitudes de los lados de un triángulo y

$$s := \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

es su semi-perímetro, entonces su área A viene dada por

$$A = \sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}.$$

Ejercicio 2 (2 puntos) Consideremos la esfera de centro $C = (1, 1, -2)$ y radio 1.

(a) ¿Cuál es el punto de la esfera que está más lejos del punto $P = (1, 2, 3)$?

(b) ¿Cuál es el punto de la esfera que está más cerca del punto $Q = (\frac{11}{10}, \frac{11}{10}, -\frac{19}{10})$?

(c) ¿Cuál es el punto de la recta

$$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 5+2t, \\ z = 2-t \end{cases}$$

que está más cerca de la esfera? *Solución*: Es el punto $(7/6, 10/3, 17/6)$.

Ejercicio 3 (2 puntos) *Problema de ajuste por mínimos cuadrados.* Dados $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 2, 3)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, -1, 0, 1)$, hallar la función de la forma $f(x) = a\,\mathrm{e}^{1-x} + b\cos 2x$ que hace mínima la suma

$$E(a, b) := \sum_{i=1}^{4} \big(y_i - f(x_i)\big)^2,$$

Indicación.- La solución es $a = 0{,}4107$; $b = 0{,}7947$: La Figura 1 recoge la gráfica de la función $f(x) := 0{,}4107\,\mathrm{e}^{1-x} + 0{,}7947\cos 2x$. Los puntos dados $(1, 1), (1, -1), (2, 0), (3, 1)$ van en color rojo.

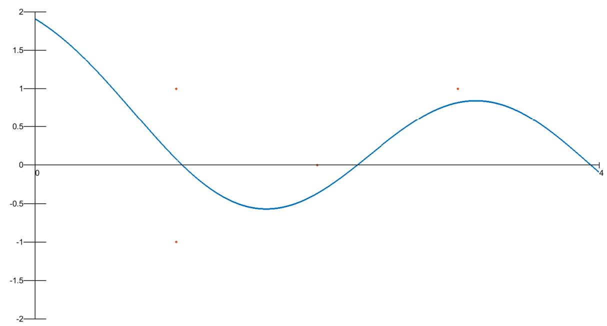

Figura 1: $f(x) := 0{,}4107\,\mathrm{e}^{1-x} + 0{,}7947\cos 2x$.

Ejercicio 4 (2 puntos) Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en todo el plano. Se consideran las funciones (donde ϕ es otra forma posible de escribir la letra griega φ, pronúnciese "fi")

$$\begin{cases} \phi_1(t) := f(\cos t, \operatorname{sen} t), \\ \phi_2(t) := f(1-\operatorname{sen} t, 1-\cos t), \end{cases}$$

siendo t una variable real y cuyas gráficas sobre el intervalo $-1 \leq t \leq 1$ se muestran en la Figura 2.

1.- Demostrar que $(1,0)$ es un punto crítico de $f(x,y)$.
2.- Acabar la demostración de que $(1,0)$ es punto de ensilladura de $f(x,y)$.

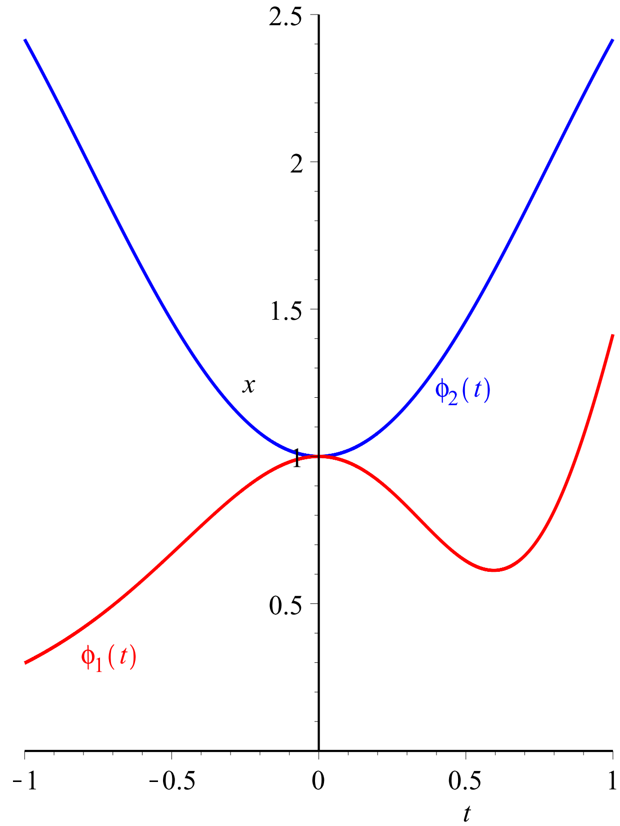

Figura 2: Gráficas de $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$.

Ejercicio 5 (2 puntos) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo el plano. Supongamos que $f(x, y)$ alcanza un máximo o un mínimo relativo en el punto (x_0, y_0). Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Ejercicio 6 (2 puntos) Dada la función

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Probar que $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = -1$.
- Demostrar que la función $f(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

Se considera la función $h(x, y) := 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$. Determinar los puntos críticos de $h(x, y)$ y discutir su naturaleza (máximos, mínimos, puntos de ensilladura).

Se tendrán en cuenta las 5 mejores notas. Se aprueba con 5 puntos.