

# Proyectos de trabajos para “Matemáticas”

9 de diciembre de 2011

## Resumen

En cada uno de los Proyectos elegidos, los estudiantes deberán completar las etapas siguientes:

- Comprender el problema. Tomarse el tiempo necesario. Ponerse ejemplos concretos para experimentar.
- Resolver el problema.
- Analizar la solución y los resultados obtenidos.
- Estudiar los conceptos matemáticos que se han empleado: definiciones; teoremas; métodos; etc.
- Redactar la solución. Añadir gráficas siempre que sea posible. Redactar también la teoría de las matemáticas empleadas.
- Preparar una presentación: escrita a mano, y luego escaneada, (por ejemplo en formato jpg) Regla de oro para cada página: (1) Máximo 8 líneas; (2) Máximo 16 caracteres por línea (A ser posible).
- Presentar en público el trabajo.

## Proyecto 1 (asignado el 27 de septiembre de 2011).

### Depósitos agitados

Un depósito de 756 l de capacidad está lleno de agua con 1000 g de sal. A partir de un instante dado se bombea al depósito una salmuera (mezcla de agua y sal) con una concentración de sal de  $(1 + \sin t)$  g/l a razón de 1 l/s. La mezcla sale del depósito a razón de 1 l/s. Hallar la cantidad de gramos de sal  $x(t)$  presente en el depósito a los  $t$  segundos de comenzar el bombeo.

Explicar completamente la resolución del ejercicio. Hay que justificar por qué la derivada  $x'(t)$  se iguala a la cantidad de sal que *entra* por unidad de tiempo *menos* la cantidad de sal que *sale* por unidad de tiempo.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: definición de integral definida, teorema del valor medio para integrales, ecuación diferencial lineal.

### Referencias

- [1] Ralph Palmer Agnew: *Ecuaciones diferenciales*

ASIGNADO A:

Lidia Janda  
Laura García  
Janire Basterra  
Gloria Valer

## Proyecto 2 (asignado el 26 de octubre de 2011).

### Hilera de depósitos agitados

El primer tanque de una hilera contiene una mezcla de  $G - g$  litros de líquido  $A$  y  $g$  litros de líquido  $B$ . Cada uno de los tanques siguientes contiene  $G$  litros de líquido  $A$ . A partir del instante  $t = 0$  se bombea líquido  $A$  al primer tanque a razón de  $r$  litros por minuto y así una mezcla de  $A$  y  $B$  se hace pasar de un tanque al siguiente con la misma velocidad. Supóngase que los tanques están perfectamente agitados. Sean  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$  las cantidades de líquido  $B$  en los tanques sucesivos en el instante  $t$ . Demuéstrese que la función  $x_n(t)$  alcanza su máximo valor  $M_n$  en  $t = \frac{nG}{r}$ . Hállese el valor de  $M_n$ .

Dedúzcase de estos resultados que  $n^n e^n \leq n!$  para todo entero  $n > 0$ .

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: ecuación diferencial lineal de primer orden, demostración por inducción.

### Referencias

- [1] Ralph Palmer Agnew: *Ecuaciones diferenciales*.
- [2] J. Polking, A. Boggess, D. Arnold: *Differential equations*. Página 439.

### ASIGNADO A:

Diego Martín

Nerea Sastre

Sharay Eugenia

Julen López de Sosoaga

Josué Fernández Almodóvar

**Proyecto 3** (asignado el 4 de octubre de 2011).

**Estimación de parámetros por vía indirecta**

Supongamos un depósito agitado lleno inicialmente con 50 litros de agua pura. A partir de un instante se vierte al depósito una disolución de agua con sal a razón de 1 litro por minuto y de concentración  $a$  gramos de sal por litro. La mezcla sale del depósito por un orificio inferior a razón de  $b$  litros por minuto.

Sea  $c(t)$  la concentración en gramos de sal por litro que hay en el depósito a los  $t$  minutos de comenzar los bombeos.

Supongamos que se han hecho medidas de  $c(t)$  en determinados momentos y que han dado los valores siguientes

$t$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$c(t)$	0.18	0.33	0.45	0.55	0.63	0.70	0.75	0.80	0.83	0.86	0.89	0.91

Estimar los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

ASIGNADO A:

Izaskun Arregui

Raúl González

Eneko González

José Luis Nieto

Aitor O’Ryan

Pamela Maritza Yampa

## Proyecto 4.

### Un problema de Arnold

Tomemos una cucharada de vino de un tonel de vino, y la echamos en una taza de té. Revolvemos la mezcla y devolvemos una cucharada de la taza al tonel. En ese momento tenemos algo de una sustancia extraña (vino) en la taza y algo de una sustancia extraña (té) en el tonel. ¿Cuál es mayor: la cantidad de vino en la taza o la cantidad de té en el tonel después de estas manipulaciones?

Volvamos a hacer estos intercambios una segunda vez. De nuevo ¿cuál es mayor: la cantidad de vino en la taza o la cantidad de té en el tonel?

Si repetimos este proceso  $n$  veces, hallar las cantidades de vino en la taza ( $w_n$ ) y de té en el tonel ( $t_n$ ) tras la etapa  $n$ -sima. Demostrar estas fórmulas por inducción sobre  $n$ .

¿Acabará pasando todo el té inicial al tonel? ¿Habrá un tope a la cantidad de té que llegará a haber en el tonel?

Idear un problema de dos depósitos interconectados que modele este proceso de forma continua. Resolver el sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales y hallar el límite de la solución cuando el tiempo tiene a infinito.

¿Qué relación guarda el método numérico de Euler con la parte primera de este problema?

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: mezclas, demostración por inducción, ecuaciones diferenciales.

## Proyecto 5 (asignado el 18 de octubre de 2011).

### Problemas sobre quitanieves

Cierto día empezó a nevar densa y uniformemente antes del mediodía. Al mediodía salió una máquina quitanieves que recorrió 2 km durante la primera hora y 1 km más durante la segunda hora. ¿A qué hora empezó a nevar?

*Variante del problema.* Supongamos que hubiese empezado a nevar antes del mediodía, y que tres quitanieves salen al mediodía, a la 1 y a las 2, respectivamente, yendo por el mismo camino. Si en algún momento posterior se juntan los tres en un mismo punto, encontrar este momento y también la hora en que empezó a nevar.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: integrales, ecuaciones diferenciales.

### Referencias

- [1] Ralph Palmer Agnew: *Ecuaciones diferenciales*
- [2] M. S. Klamkin. *Amer. Math. Monthly*, 59 (1952) 42.
- [3] <http://www.math.ubc.ca/~israel/m215/plows/plows.html>

### ASIGNADO A:

Nataly Muñoz  
Amaia Garbizu  
Ane Aguilar  
Alba González Maoño

## Proyecto 6 (asignado el 4 de octubre de 2011).

### Niveles espirituosos

Tomemos tres vasos que contienen cantidades diferentes de vodka. Vertiendo, ajustamos los dos primeros vasos de manera que el nivel en ambos sea el mismo. Ajustamos el nivel en los vasos segundo y tercero. Después en los vasos primero y tercero. Iteramos el proceso. Predecir el resultado tras  $n$  iteraciones. ¿Qué sucede cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: mezclas, recurrencias lineales, matrices, valores y vectores propios, diagonalización de matrices.

### Referencias

[1] Philip J. Davis: *Circulant matrices*, Wiley, 1979, página 107.

### ASIGNADO A:

Soledad Berrioategortua

Naira García

Javier López de Luzuriaga

Álvaro Poyo

## Proyecto 7.

### Curvas de persecución

1.- Un conejo parte del origen y corre por el eje  $y$  positivo con velocidad  $a$ . Al mismo tiempo, un perro que corre con velocidad  $b$  sale del punto  $(c, 0)$  y persigue al conejo. ¿Qué trayectoria sigue el perro?

2.- Supongamos que el perro levanta la cabeza cada unidad de tiempo y corre en línea recta hacia la posición en que ha visto al perro. Se forma una línea poligonal. ¿Qué relación guarda con el método numérico de Euler?

3.- Cuatro pulgas salen de los vértices de un cuadrado con igual velocidad y se dirigen hacia la que está a su izquierda. ¿Qué distancia recorre cada pulga hasta que se encuentran todas? ¿Qué trayectoria siguen?

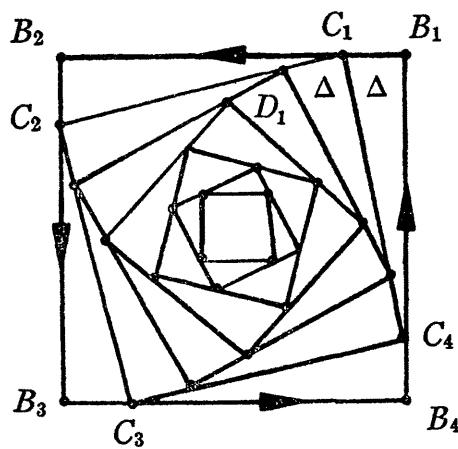


Figura 1: Cuatro pulgas que se persiguen.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: longitud de un arco de curva, ecuaciones diferenciales integrables elementalmente.

### Referencias

- [1] G. Simmons: *Ecuaciones diferenciales*, Segunda edición. McGrawHill, p. 72.
- [2] Z.A. Melzak: *Companion to concrete mathematics*, Wiley, New York, 1973.
- [3] Z.A. Melzak: *Mathematical ideas, modeling and applications*, Wiley, New York, 1976.
- [4] P. J. Nahin: *Chases and escapes: the mathematics of pursuit and evasion*, Princeton University Press, 2007.

**Proyecto 8** (asignado el 3 de octubre de 2011).

**Evolución de un movimiento**

Consideremos el proceso siguiente. Una partícula se mueve en el intervalo  $[0, 1]$  hasta que alcanza un extremo, en cuyo instante cambia de dirección y se mueve en sentido contrario hasta que alcanza el otro extremo. La partícula empieza en un punto  $c$  y se mueve hacia la derecha con velocidad uniforme  $a$ . Cuando se mueve hacia la izquierda, lo hace con velocidad uniforme  $b$ .

Encontrar una expresión para la posición de la partícula en el instante  $t$ .

**Referencias**

[1] R. Belman, K. Cooke: *Ordinary differential equations*

ASIGNADO A:

Aitana Sánchez

Marina López

Carlos Couso

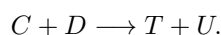
Erlantz Ortiz

Daniel Yarritu

### Proyecto 9 (asignado el 27 de octubre de 2011).

#### Ley de acción de masas

Se combinan  $M_C$  gramos de una sustancia química  $C$  con  $M_D$  gramos de una sustancia química  $D$  en un volumen de  $V$  litros de solución acuosa, para producir  $T$  y  $U$  de acuerdo con la reacción de segundo orden



Sea  $x(t)$  la suma total de los gramos de  $C$  y  $D$  que han desaparecido (o reaccionado) al cabo de  $t$  minutos. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas:

(a) Demostrar que

$$\frac{dx}{dt} = K \left( M_C - \frac{m_C}{m_C + m_D} x \right) \left( M_D - \frac{m_D}{m_C + m_D} x \right)$$

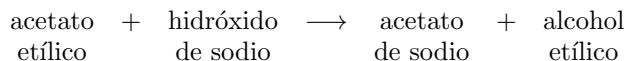
donde  $m_C$  y  $m_D$  son los pesos moleculares de  $C$  y  $D$ , respectivamente, y  $K$  es una constante positiva.

(c) Se combinan 260 g. de  $CH_3COOC_2H_5$  (acetato etílico) con 175 g. de  $NaOH$  (hidróxido de sodio) en un volumen de  $V$  litros de solución acuosa, para producir  $CH_3COONa$  (acetato de sodio) y  $C_2H_5OH$  (alcohol etílico), tomando la reacción



como irreversible. Al cabo de 10 minutos, se han formado 60 g. de acetato de sodio. Sabiendo que la reacción obedece a la *ley de acción de masas*, hállese el número de gramos de acetato de sodio y de alcohol etílico presentes al cabo de 1/2 hora.

(Sugerencia: utilícense los pesos atómicos:  $C = 12'01$ ,  $H = 1'008$ ,  $O = 16$ ,  $Na = 22'997$ ).



MATEMÁTICAS RELACIONADAS: ecuación diferencial de variables separadas, integrales de fracciones racionales.

#### Referencias

[1] M.R. Spiegel. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. UTEHA, México. p. 116.

ASIGNADO A:

Ana Arenaza

Mariana Martínez Barredo

Alba Domínguez Gracia

María García Paunero

Nerea Bandrés

### Proyecto 10.

#### Periodo de una trayectoria de un sistema de Volterra-Lotka.

Sea

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3x(t)y(t), \\ y'(t) = -6x(t) + 5x(t)y(t) \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales de Volterra-Lotka. Se sabe que sus soluciones son funciones periódicas. Esto implica que las trayectorias del sistema son curvas cerradas. Sea  $(x(t), y(t))$  la solución que satisface la condición inicial  $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ . Determinar de forma aproximada el periodo positivo mínimo  $p$  de esta función. Es decir, hallar aproximadamente  $p$  sabiendo que para todo  $t$  real,  $(x(t+p), y(t+p)) = (x(t), y(t))$ .

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Teorema de existencia y unicidad. Funciones periódicas. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales (Euler, Runge-Kutta).

### Proyecto 11.

**Puntos de ensilladura.** Sea  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  un punto crítico de una función real  $f(x_1, \dots, x_n)$  con derivadas parciales segundas en una bola  $B(\mathbf{a}, r)$  de centro  $\mathbf{a}$  y radio  $r > 0$ . Demostrar que si hay dos elementos de la diagonal principal de la matriz hessiana  $H(\mathbf{a})$  con signos opuestos, entonces  $f(x_1, \dots, x_n)$  tiene un punto de ensilladura en  $\mathbf{a}$ .

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Fórmula de Taylor para funciones de varias variables. Formas cuadráticas. Matrices reales simétricas. Valores y vectores propios.

### Referencias

- [1] T.M. Apostol. *Calculus*. Vol. 2. Reverté. Barcelona.

**Proyecto 12** (asignado el 20 de octubre de 2011).

**Método de minimización del gradiente, o del descenso por la máxima pendiente.**

Aplicando el método de minimización del gradiente resolver aproximadamente el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}(x + y), \\ y = \operatorname{cos}(x - y). \end{cases}$$

Para ello debemos buscar el punto  $(x, y)$  que hace mínimo el valor de la función

$$f(x, y) := [x - \operatorname{sen}(x + y)]^2 + [y - \operatorname{cos}(x - y)]^2.$$

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: diferencial, derivadas direccionales, gradiente.

**Referencias**

- [1] T.M. Apostol. *Calculus*. Vol. 2. Reverté. Barcelona.
- [2] F. Scheid. *Theory and problems of Numerical Analysis*. Col. Schaum. McGrawHill. 1968. Págs. 329–330.

ASIGNADO A:  
Arkaitz Carrascal  
Diego Mendizábal  
Andrea Aparicio  
Maitane González

### Proyecto 13.

#### Interpolación de Cressman

1.- Se consideran dados tres puntos distintos  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$  del plano  $x, y$ . Sean  $z_1, z_2, z_3$  números reales dados. Se considera la función  $g(x, y)$  definida en todo punto  $P = (x, y)$  del plano, salvo en estos tres puntos, de la manera siguiente:

$$g(P) := \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3}{w_1 + w_2 + w_3},$$

siendo  $w_i$  igual al inverso del cuadrado de la distancia del punto  $P$  al punto  $P_i$ , para cada  $i = 1, 2, 3$ .

Se pide

- I. Hallar una fórmula explícita que nos dé  $g(x, y)$  en función de  $x, y$ .
- II. Probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_1, y_1)} g(x, y) = z_1.$$

- III. ¿Se puede definir el valor  $g(x_1, y_1)$  para que  $g(x, y)$  sea continua en  $(x_1, y_1)$ ?
- IV. Probar que  $g'_x(x_1, y_1) = 0$ ,  $g'_y(x_1, y_1) = 0$ . ¿Es diferenciable  $g(x, y)$  en el punto  $(x_1, y_1)$ ?

2.- Se consideran dados  $n$  puntos distintos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  del plano  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $z_1, \dots, z_n$  números reales dados. Se considera la función  $g(x, y)$  definida en todo punto  $(x, y)$  del plano de la manera siguiente:

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{w_1 z_1 + \dots + w_n z_n}{w_1 + \dots + w_n}, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}, \\ z_i, & \text{si } (x, y) = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

siendo

$$w_i := \frac{1}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

cuando  $(x, y) \neq (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Se pide

- I. Probar que  $g(x, y)$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .
- II. Probar que  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  son puntos críticos de  $g(x, y)$ .
- III. ¿Es diferenciable  $g(x, y)$  en cada punto  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ?

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: diferencial, continuidad, interpolación.

## Proyecto 14 (asignado el 19 de septiembre de 2011).

### Leyes de Kepler sobre los planetas.

Estas leyes, que rigen el movimiento de los planetas en torno al Sol, son las siguientes:

- *Primera ley de Kepler.* Los planetas describen órbitas planas que son elipses en uno de cuyos focos está el Sol.
- *Segunda ley de Kepler.* Las áreas barridas por el radio vector desde el Sol a un planeta en tiempos iguales son iguales.
- *Tercera ley de Kepler.* El cuadrado del periodo de revolución, dividido por el cubo del eje mayor de la órbita, es igual para todos los planetas.

Se pide demostrar estas leyes a partir de la segunda ley del movimiento de Newton y de su ley de la gravitación universal.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Elipses, vectores, producto vectorial, coordenadas polares, derivadas, integrales.

### Referencias

- [1] T.M. Apostol. *Calculus*. Vol. 1. Reverté. Barcelona. Páginas 667–671.
- [2] Larson, Hostetler, Edwards. *Calculus II. Octava edición*. McGrawHill, México, 2006. Páginas 751–755.

### ASIGNADO A:

Aitor Mingo  
Iñigo Urbina  
Luis Aguirre  
Mikel Muñoz  
Javier Urquijo

**Proyecto 15** (asignado el 26 de septiembre de 2011).

**Problemas isoperimétricos.**

1.- Se tiene un alambre de 100 cm de longitud. Se parte en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un círculo y con el otro un cuadrado. Hallar la longitud de los trozos para que sea mínima la suma de las áreas del círculo y del cuadrado. Idem para que sea máxima.

2.- Se tiene un alambre de 100 cm de longitud. Se parte en tres trozos. Con uno de los trozos se forma un círculo, con otro un cuadrado, y con el restante un triángulo equilátero. Hallar la longitud de los trozos para que sea mínima la suma de las tres áreas del círculo, del cuadrado y del triángulo. Idem para que sea máxima.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Máximos y mínimos de funciones de una y de dos variables.

**Referencias**

- [1] L. Bers. *Calculus*.
- [2] M. Levi. *The mathematical mechanic*. Princeton Univ. Press, 2009, página 40 y siguientes.

ASIGNADO A:

Javier Castillo  
Javier Couceiro  
Aitor Rodríguez  
Alfonso Doce  
Julen Plaza

**Proyecto 16** (asignado el 28 de octubre de 2011).

**Aguja de Buffon.**

Se tiene una aguja de longitud  $\ell$ . Se trazan en el plano una colección de rectas paralelas separadas cada una de sus inmediatas una longitud  $\ell$ . ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar la aguja al plano se quede en una posición que corte o toque a alguna de las rectas?

*Extensión de Laplace.* Si trazamos una cuadrícula de rectas que forman cuadrados de lado  $\ell$ . ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar la aguja quede dentro de uno de los cuadrados?

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Probabilidades geométricas, integrales, número  $\pi$ .

ASIGNADO A:  
Patricia Kortabarría

**Proyecto 17** (asignado el 28 de septiembre de 2011).

**Ajuste de una elipse a unos puntos por el método de los mínimos cuadrados**

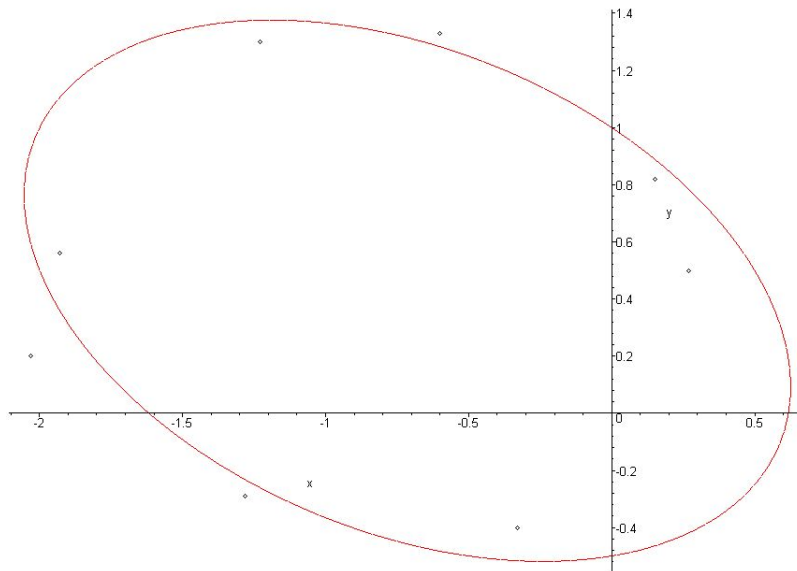
Dados  $n$  puntos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  del plano hallar la elipse que pasa lo más cerca posible de ellos.

En concreto, dados los puntos

$$(-1.93, 0.56), (-1.23, 1.30), (-0.60, 1.33), (0.15, 0.82),$$

$$(-0.33, -0.40), (-2.03, 0.20), (0.27, 0.50), (-1.28, -0.29)$$

hallar la elipse  $ax^2 + by^2 + cx + dy + fxy = 1$  que pasa lo más cerca posible de todos ellos.



MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Máximos y mínimos de funciones de varias variables reales. Elipses: forma normal, ejes, centro, rotaciones.

ASIGNADO A:

Gonzalo Perelló  
Jon Ruiz de Sabando  
Ana Cabañas  
Irene Martínez

## Proyecto 18.

### Continuidad de funciones.

1.- Sea  $x = 0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$  la representación decimal del número real  $x$  ( $0 < x < 1$ ). Sea  $n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$  una sucesión creciente de números naturales. Analizar si la función

$$f(x) := 0, d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_k} \dots$$

es continua. ¿Podría ser derivable en algún punto para una elección especial de la sucesión  $n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$ ?

*Indicación.*- Si  $n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$  es la sucesión de los números pares  $2, 4, 6, \dots$ , entonces  $f(0,3345713400891) = 0,351409$ .

2.- Sea  $D$  el cuadrado abierto formado por los puntos  $(x, y)$  tales que  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ . Consideremos las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  definidas sobre  $D$  de la siguiente manera: Si

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_m \dots$$

son los desarrollos decimales de  $x$  e  $y$ , respectivamente, donde  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  y  $b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$  son cifras de  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ , definimos

$$f(x, y) := 0, a_1 b_2 a_3 b_4 a_5 b_6 \dots; \quad g(x, y) := 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

¿Son continuas las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  en cualquier punto de  $D$ ?

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Funciones continuas de una y dos variables reales.

## Proyecto 19.

### Soluciones periódicas.

1.- Sea  $f(x, y)$  una función real continua en todo punto  $(x, y)$  del plano. Probar que si la ecuación diferencial

$$x''(t) = f(x(t), x'(t))$$

no tiene soluciones constantes, tampoco tiene soluciones periódicas.

2.- Demostrar que la ecuación diferencial

$$x'(t) = \operatorname{sen} t - x(t)^3$$

tiene exactamente una solución periódica  $u(t)$  de periodo  $2\pi$ .

Probar que todas las soluciones  $v(t)$  de esta ecuación diferencial tienden a  $u(t)$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$ ; es decir, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t) - u(t)| = 0.$$

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: ecuaciones diferenciales, funciones continuas de dos variables, teorema de Bolzano, funciones periódicas, regla de Barrow.

### Referencias

[1] O. Plaet. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Reverté, Barcelona.

**Proyecto 20** (asignado el 27 de octubre de 2011).

**Longitud de cintas y rollos.**

1.- Una cinta magnetofónica de 0,0254 mm de espesor se enrolla en una bobina cuyo radio interior mide 12,7 mm y cuyo radio exterior mide 50,8 mm. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar la bobina?

2.- Sabiendo que un rollo de papel higiénico está enrollado sobre un cilindro de 4 cm de diámetro y el rollo completo tiene un diámetro de 12 cm, hallar la relación entre el espesor del papel y su longitud total.

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Integrales. Longitud de una curva plana. Coordenadas polares.

**Referencias**

- [1] Larson, Hostetler, Edwards. *Calculus II. Octava edición*. McGrawHill, México, 2006. Página 723.

ASIGNADO A:

Noé Ortiz

Izan Sampedro

Mikel Alegre

Asier Arestizabal

## Proyecto 21.

### Aplicación logística

(a) Consideremos la función  $f(x) = rx(1-x)$  donde  $0 < r < 4$ . Dado un punto inicial  $x_0$  entre 0 y 1 formemos la sucesión por recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(1) ¿Para qué valores de  $r$  es convergente la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ?

(2) ¿Para qué valores de  $r$  es oscilante la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ?

2.1 ¿Para qué valores de  $r$  oscila la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  alrededor de 2 puntos?

2.2 ¿Para qué valores de  $r$  oscila la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  alrededor de 4 puntos?

2.3 ¿Para qué valores de  $r$  oscila la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  alrededor de 8 puntos?

2.4 ¿Para qué valores de  $r$  oscila la sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  alrededor de 16 puntos?

2.5 ¿Existe algún valor de  $r$  para el que la sucesión oscile alrededor de 3 puntos?

(b) Contestar a las mismas preguntas para la función  $f(x) = r \operatorname{sen}(\pi x)$  donde  $0 < r < 1$  y  $0 < x_0 < 1$ .

(c) Explicar la Figura 2 en relación con las cuestiones de la parte (a).

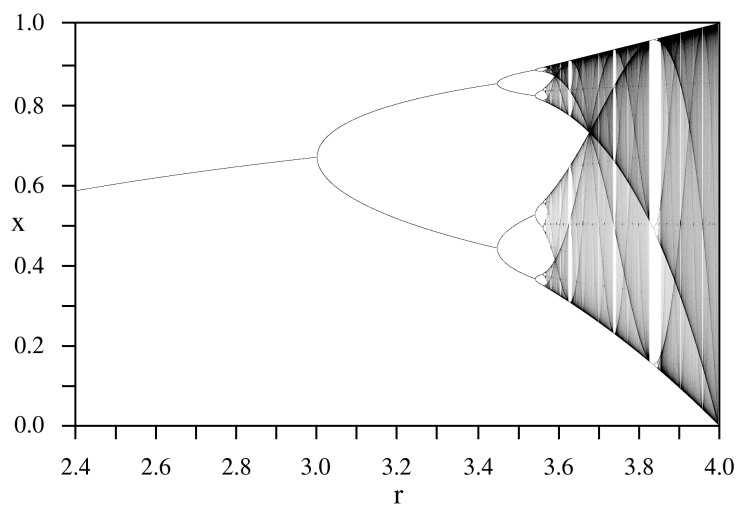


Figura 2: Diagrama de bifurcación.

### Referencias

[1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map) (16 de agosto de 2011).

## Proyecto 22 (asignado el 29 de septiembre de 2011).

### Soluciones aproximadas de sistemas incompatibles

Denotemos por  $\mathbb{R}^{p \times q}$  el espacio de matrices  $p \times q$  con coeficientes reales. Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ . Supongamos que el rango de la matriz  $A$  es diferente del rango de la matriz  $[A, b]$ . Por el Teorema de Rouché-Frobenius sabemos que el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

es incompatible. Lo que quiere decir que no tiene soluciones. Ahora bien, supongamos que cambiamos el signo = (igual) por el signo  $\simeq$  (casi igual). Nos queda el sistema aproximado

$$Ax \simeq b.$$

*Objetivo:* Hallar soluciones  $x$  que satisfagan la aproximación  $Ax \simeq b$ . Esto lo traducimos en buscar vectores  $x$  que hagan mínima la norma euclídea

$$\|Ax - b\|_2.$$

*Sígase el siguiente abordaje del problema:* Llamando  $A^1, A^2, \dots, A^n$  a los vectores columna de la matriz  $A$ , una solución aproximada de  $Ax \simeq b$  satisfaría

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n \simeq b.$$

Sea  $\mathcal{C} := \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{m \times 1}$  engendrado por los vectores  $A^1, A^2, \dots, A^n$ . El problema de hallar el mínimo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \|Ax - b\|_2$$

equivale a hallar el vector  $x^0$  de  $\mathcal{C}$  que esté más próximo al vector  $b$ . Recordando el método de ajuste por los mínimos cuadrados, hallar  $x^0$  como la proyección ortogonal de  $b$  sobre el subespacio vectorial  $\mathcal{C}$ .

Resolver sistemas concretos para  $m = 2, 3, 4$ ,  $n = 2, 3, 4$ . Por ejemplo, hallar la (¿una?) solución aproximada de

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \simeq -2 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \simeq -6,01 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS RELACIONADAS: Ajuste por mínimos cuadrados. Independencia lineal de vectores. Subespacios vectoriales, Producto escalar. Norma euclídea. Teorema de Pitágoras generalizado.

### Referencias

- [1] S. Lang: *Linear Algebra*. Capítulo 1.

- [2] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2000. También disponible en Internet. Página 437.
- [3] A.M. Robert: *Linear algebra: examples and applications*. World Scientific, 2005.

ASIGNADO A:

Olaia Martín  
Felicia Balda  
Sonia Arroyo  
Janire Azcona