1º de Ciencias Ambientales
Grupo 16

Problemas de Cálculo y Álgebra

Juan-Miguel Gracia

Extracto: Se proponen algunos problemas a los estudiantes de "Cálculo y Álgebra" de 1º de Ciencias Ambientales.

mepgrmej@vc.ehu.es
25 de noviembre de 2002

Índice General

1. Problema
2. Problema
3. Problema
4. Problema
5. Problema
6. Problema
7. Problema
8. Problema
9. Problema
10. Problema
11. Problema
12. Problema
13. Problema
14. Problema
15. Problema
16. Problema
17. Problema

18. Problema
19. Problema
20. Problema
21. Problema
22. Problema
23. Problema
24. Problema
25. Problema

1. Problema

Propuesto el 9 de octubre de 2002.

Sea $x = 0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$ la representación decimal del número real x $(0 \leq x \leq 1)$. Sea $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \cdots$ una subsucesión creciente de los números naturales $1, 2, \dots, n, \dots$ Analizar si la función

$$f(x) := 0, d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_k} \dots$$

es continua. Podría ser derivable en algún punto para una elección especial de la subsucesión $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \cdots$.

Indicación.- Si $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \cdots$ es la sucesión de los números pares $2, 4, 6, \dots$, entonces $f(0,3345713400891) = 0,351409$.

2. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Se pide demostrar que la ecuación

$$x^2 + \operatorname{sen} x = 4$$

tiene alguna raíz real.

3. Problema

Propuesto el 9 de octubre de 2002

1. Definamos
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ racional}), \\ 0 & (x \text{ irracional}). \end{cases}$$
Demuéstrese que f tiene un punto de discontinuidad de segunda clase en cada punto x, pues no existen $f(x^+)$, ni $f(x^-)$.

2. Definamos
$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ racional}), \\ 0 & (x \text{ irracional}). \end{cases}$$
Pruébese que $f(x)$ es continua en $x = 0$ y tiene una discontinuidad de segunda clase en todos los demás puntos.

3. Definamos
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (-3 < x < -2), \\ -x - 2 & (-2 \le x < 0), \\ x + 2 & (0 \le x < 1). \end{cases}$$

Demuéstrese que $f(x)$ tiene una discontinuidad simple en $x = 0$ y es continua en todo otro punto de $(-3, 1)$.

4. Problema

Propuesto el 9 de octubre de 2002

Definamos

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Demuéstrese que $f(x)$ tiene en $x = 0$ un punto de discontinuidad de segunda clase. ¿Entre qué dos extremos oscilan los valores de $f(x)$ cuando $x \to 0$?

5. Problema

Propuesto el 9 de octubre de 2002

Definamos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

¿Es continua $f(x)$ en $x = 0$? Hállese $f'(0)$. ¿Existe $f''(0)$?

6. Problema

Propuesto el 27 de octubre de 2002

Hállense tres cifras decimales exactas del número real $\operatorname{sen} 1{,}5$. Se pide una justificación.

7. Problema

Propuesto el 27 de octubre de 2002

Sea $f(x)$ una función real definida en el intervalo $[-5, 5]$ de la que conocemos las dos tablas de valores dadas a continuación. Es sabido que $f(x)$ admite derivadas de cualquier orden. Decir todo lo que se pueda de $f(x)$ y de su gráfica $y = f(x)$.

En particular, se pide hallar **aproximadamente**:

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- La integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Las derivadas $f'(2{,}3)$, $f''(2{,}3)$.
- La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0), con $x_0 = 2{,}3, y_0 = 3{,}6373$.
- Los intervalos de concavidad y convexidad.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-5	5,3794	$-3{,}4$	5,4524	$-1{,}8$	2,9443	$-0{,}2$	2,1550	1,4	2,8997
$-4{,}9$	5,4600	$-3{,}3$	5,2886	$-1{,}7$	2,8541	$-0{,}1$	2,1441	1,5	3,0137
$-4{,}8$	5,5455	$-3{,}2$	5,1123	$-1{,}6$	2,7714	0	2,1386	1,6	3,1283
$-4{,}7$	5,6331	$-3{,}1$	4,9276	$-1{,}5$	2,6955	0,1	2,1388	1,7	3,2402
$-4{,}6$	5,7194	-3	4,7383	$-1{,}4$	2,6260	0,2	2,1455	1,8	3,3455
$-4{,}5$	5,8006	$-2{,}9$	4,5482	$-1{,}3$	2,5621	0,3	2,1592	1,9	3,4401
$-4{,}4$	5,8728	$-2{,}8$	4,3604	$-1{,}2$	2,5035	0,4	2,1804	2	3,5202
$-4{,}3$	5,9317	$-2{,}7$	4,1775	$-1{,}1$	2,4498	0,5	2,2100	2,1	3,5819
$-4{,}2$	5,9736	$-2{,}6$	4,0017	-1	2,4005	0,6	2,2485	2,2	3,6218
$-4{,}1$	5,9949	$-2{,}5$	3,8346	$-0{,}9$	2,3556	0,7	2,2964	2,3	3,6373
-4	5,9929	$-2{,}4$	3,6771	$-0{,}8$	2,3147	0,8	2,3542	2,4	3,6266
$-3{,}9$	5,9655	$-2{,}3$	3,5299	$-0{,}7$	2,2779	0,9	2,4221	2,5	3,5890
$-3{,}8$	5,9119	$-2{,}2$	3,3930	$-0{,}6$	2,2450	1	2,5002	2,6	3,5247
$-3{,}7$	5,8322	$-2{,}1$	3,2665	$-0{,}5$	2,2161	1,1	2,5880	2,7	3,4353
$-3{,}6$	5,7275	-2	3,1498	$-0{,}4$	2,1913	1,2	2,6848	2,8	3,3228
$-3{,}5$	5,5999	$-1{,}9$	3,0426	$-0{,}3$	2,1709	1,3	2,7893	2,9	3,1905

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3	3,0420	4	1,4412
3,1	2,8812	4,1	1,3193
3,2	2,7121	4,2	1,2073
3,3	2,5388	4,3	1,1049
3,4	2,3647	4,4	1,0115
3,5	2,1929	4,5	0,9265
3,6	2,0262	4,6	0,8493
3,7	1,8664	4,7	0,7792
3,8	1,7151	4,8	0,7155
3,9	1,5732	4,9	0,6578

8. Problema

Propuesto el 3 de noviembre de 2002

Se pide hallar el polinomio de Taylor de grado ≤ 3 en el punto $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

9. Problema

Propuesto el 3 de noviembre de 2002

Se pide encontrar las derivadas $f'(0), f''(0)$ y $f'''(0)$ de la función

$$f(x) := |x|^3,$$

si existen.

10. Problema

Propuesto el 4 de noviembre de 2002

Hállese $F'(x)$ si

$$F(x) := \int_0^x \frac{x^2}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

11. Problema

Propuesto el 15 de noviembre de 2002

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vectores no nulos. Supongamos que para todo número real x, se tenga que

$$\|\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b}\| \geq \|\boldsymbol{a}\|.$$

Demuestre que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares.

12. Problema

Propuesto el 15 de noviembre de 2002

Sean $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ vectores de $\mathbb{R}^n$ de longitud 1 y perpendiculares a pares, esto es, $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0$ si $i \neq j$. Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y sea

$$c_i := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_i,$$

la componente de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Demuestre que para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_m$, se tiene que

$$\|\boldsymbol{a} - (c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{b}_m)\| \leq \|\boldsymbol{a} - (x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{b}_m)\|.$$

13. Problema

Propuesto el 18 de noviembre de 2002

Dados dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{b}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$, y un escalar k, demuestre que la solución común $\boldsymbol{x}$ a las ecuaciones

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = k, \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

es única. Se pide también encontrarla.

Véase si la solución es válida en el caso en que $\boldsymbol{b}$ no sea perpendicular a $\boldsymbol{a}$.

14. Problema

Propuesto el 18 de noviembre de 2002

Demuestre que la solución general de la ecuación

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

es

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2},$$

donde t es un escalar arbitrario.

15. Problema

Propuesto el 18 de noviembre de 2002

El plano

$$x + 2y - z = 8$$

gira sobre su intersección con el plano

$$5x - 2y + 7z = 17$$

un ángulo de 60 grados en ambas direcciones. Dense las ecuaciones del plano en las nuevas posiciones.

16. Problema

Propuesto el 18 de noviembre de 2002

Encuentre la longitud y ecuaciones de la perpendicular común a las rectas

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$$

y

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}.$$

17. Problema

Propuesto el 18 de noviembre de 2002

Hállense las coordenadas de la imagen del punto (p, q, r) en el plano

$$ax + by + cz + d = 0,$$

tomando dicho plano como espejo.

Un rayo de luz que pasa por el origen se refleja sucesivamente en los planos

$$x + y - z + 1 = 0,$$
$$x - y + 2z - 1 = 0,$$

y pasa de nuevo por el origen. Dense los puntos en que corta a los dos planos.

18. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Demuestre que la función

$$f(x, y) := \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \text{ para } (x, y) \neq (0, 0),$$

no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

19. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Dada la función

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) := 0,$$

pruebe que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Indicación.- Estudie los valores de $f(x,y)$ sobre la recta $y = x$.

20. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Si $f(x,y) := [\operatorname{sen}(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$, ¿cómo debe definirse $f(0,0)$ para que $f(x,y)$ sea continua en el origen.

21. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

(a) Demuestre que no existe una función real $f(x, y)$ tal que $f'(P_0; \boldsymbol{v}) > 0$ para un punto fijo P_0 y todo vector no nulo $\boldsymbol{v}$.

(b) Dése un ejemplo de una función real $f(x, y)$ tal que $f'(P; \boldsymbol{v}_0) > 0$ para un vector fijo $\boldsymbol{v}_0$ y todo punto P.

22. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Sea $f(x,y)$ la función real definida en $\mathbb{R}^2$ del modo siguiente:

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Demuestre que existe $f'((0,0),\boldsymbol{u})$ para todos los vectores unitarios $\boldsymbol{u}$. También que $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.

Estudie los valores de $f(x,y)$ en cada punto de la parábola $x = y^2$. A partir de ahí, pruebe que $f(x,y)$ no es continua en (0,0).

23. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Sean f y g dos funciones reales diferenciables en todos los puntos de un dominio D. Deduzca las propiedades siguientes del gradiente:

(a) $\nabla f = \mathbf{0}$ si f es constante en D.

(b) $\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g$.

(c) $\nabla (cf) = c\,\nabla f$ si c es una constante.

(d) $\nabla (fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$.

(e) $\nabla \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}$ en los puntos en los que $g \neq 0$.

24. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

En $\mathbb{R}^3$ consideremos la función vectorial

$$\boldsymbol{r}(x, y, z) := x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

y sea $r(x, y, z) := \|\boldsymbol{r}(x, y, z)\|$.

(a) Demuestre que $\nabla r(x, y, z)$ es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{r}(x, y, z)$.

(b) Demuestre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ si n es un entero positivo.

(c) ¿Es válida la fórmula del apartado (b) cuando n es entero negativo o cero?

(d) Halle una función real f definida en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

25. Problema

Propuesto el 25 de noviembre de 2002

Si $\nabla f(x, y, z)$ es siempre paralelo a $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, demuestre que f debe tomar valores iguales en los puntos $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$.