Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 30 de octubre de 2003, primer examen orientativo.

Los Problemas 1 y 2 sirven para aprobar. Nota única de aprobado: 5 puntos. Nota de suspenso: de 0 a 3 puntos.

Los Problemas 3 y 4 se proponen para sacar notable (entre 7 y 8.9 puntos) o sobresaliente (9 puntos).

Problema 1.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + xy - 4x + 3y^2$, hallar:

1. el plano tangente a la superficie $z = x^3 + xy - 4x + 3y^2$ en el punto (1,2);
2. la recta tangente a la curva $z = f(x,2)$ en el punto $x_0 = 1$;
3. la recta tangente a la curva $z = f(1,y)$ en el punto $y_0 = 2$;
4. y comprobar que el plano tangente contiene a estas dos rectas tangentes.

Problema 2.- Hallar el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \operatorname{sen} \frac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2},$$

si existe.

Problema 3.- (2'5 puntos)

La función $u = f(x,y,z) = 3x^3 - 20xyz + yz^3$ nos da la temperatura en ºC en el punto (x,y,z). Una mosca que está situada en el punto $P_0 = (1,2,3)$ tiene frío; para calentarse lo antes posible avanza una unidad de longitud en la dirección de la recta que pasa por P_0 y va paralela al vector $\nabla f(P_0)$ hasta llegar a un punto P_1; a partir de allí cambia e inicia una marcha por la recta que pasa por P_1 y va paralela al vector $\nabla f(P_1)$ andando una unidad de longitud hasta llegar al punto P_2; continuar este proceso iterativo para hallar los puntos P_3, P_4 y P_5.

Calcular los valores de $f(x,y,z)$ en los puntos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ¿Suben estos valores sin parar?; es decir, ¿es $f(P_0) \leq f(P_1) \leq f(P_2) \leq f(P_3) \leq f(P_4) \leq f(P_5)$? Si falla esta estrategia, idear variantes del procedimiento.

Problema 4.- (2'5 puntos) Hallar el límite triple

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \frac{(x-1)^2(y-2)^2(z+1)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^4 + (z+1)^6}$$

si existe. ¿Cuánto valen sus límites direccionales?