Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 27 de noviembre de 2003, segundo examen orientativo.

Los Problemas 1 y 2 sirven para aprobar. Nota única de aprobado: 5 puntos. Nota de suspenso: de 0 a 3 puntos. Los Problemas 3 y 4 se proponen para sacar notable (entre 7 y 8.9 puntos) o sobresaliente (9 puntos).

Problema 1.- Hallar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-3)\operatorname{sen}(x+y)}{xy^2+y^3-2(x+y)}.$$

Problema 2.- Sea $f(x,y)$ una función tal que

$$f'\big((1,1);(1,2)\big) = 2,$$
$$f'\big((1,1);(0,1)\big) = 3,$$
$$f'\big((1,1);(1,1)\big) = 4.$$

Decir por qué no es diferenciable $f(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

Problema 3.- (2'5 puntos) Se consideran dados tres puntos distintos $P_1 = (x_1,y_1), P_2 = (x_2,y_2), P_3 = (x_3,y_3)$ del plano x,y. Sean z_1,z_2,z_3 números reales dados. Se considera la función $g(x,y)$ definida en todo punto $P=(x,y)$ del plano, salvo en estos tres puntos, de la manera siguiente:

$$g(P) := \frac{w_1z_1+w_2z_2+w_3z_3}{w_1+w_2+w_3},$$

siendo w_i igual al inverso del cuadrado de la distancia del punto P al punto P_i, para cada $i=1,2,3$.

Se pide

I. Hallar una fórmula explícita que nos dé $g(x,y)$ en función de x,y.

II. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} g(x,y) = z_1.$$

III. ¿Se puede definir el valor $g(x_1,y_1)$ para que $g(x,y)$ sea continua en (x_1,y_1)?

IV. Probar que $g'_x(x_1,y_1)=0,\ g'_y(x_1,y_1)=0$. ¿Es diferenciable $g(x,y)$ en el punto (x_1,y_1)?

Problema 4.- (2'5 puntos) Sea $f(x,y)$ la función definida por

$$f(0,0) := 0; \quad f(x,y) := (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y)\neq(0,0).$$

Demostrar que la función es diferenciable en todo punto. Demostrar que las derivadas parciales de $f(x,y)$ no son continuas en el punto $(0,0)$.