Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 1 de diciembre de 2004, segundo examen orientativo.

Los Problemas 1 y 2 sirven para aprobar. Nota única de aprobado: 5 puntos. Nota de suspenso: de 0 a 3 puntos.

Los Problemas 3 y 4 se proponen para sacar notable (entre 7 y 8.9 puntos) o sobresaliente (9 puntos). Pero, también pueden servir para aprobar en el caso de fallos en los Problemas 1 y 2.

Problema 1.- Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en el punto $(1, -2)$.

1. Suponiendo que $f(1, -2) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 10$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 20$, hallar aproximadamente $f(0{,}99, -2{,}02)$.
2. Suponiendo que $f(1{,}01, -1{,}989) = -2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 30$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 16$, hallar aproximadamente $f(1, -2)$.
3. Suponiendo que $f(0{,}998, -2{,}012) = 4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = -17$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 32$, hallar aproximadamente $f(1{,}001, -2{,}003)$.

Problema 2.- Dadas las circunferencias

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{y} \quad (x-3)^2 + (y+5)^2 = 1,$$

1º.- hallar las dos rectas que son tangentes a ambas circunferencias y dejan a las circunferencias en el mismo semiplano; 2º.- demostrar que el punto de corte de estas rectas está alineado con los centros de las circunferencias.

Problema 3.- (2'5 puntos) Sea $f(x, y)$ la función definida por $f(0, 0) := 0$ y para todo $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) := \frac{x^6}{(y - x^2)^2 + x^8}.$$

1. ¿Es continua $f(x, y)$ en $(0, 0)$?
2. Probar que $f(x, y)$ admite todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$ y calcularlas.
3. ¿Es diferenciable $f(x, y)$ en $(0, 0)$?

Problema 4.- (2'5 puntos) **Navegación por olfato**

Muchas especies animales emplean el olfato para navegar en su ambiente. Por ejemplo, una langosta puede usar sus antenas para detectar concentraciones muy pequeñas de productos químicos en el agua donde habita (es decir, "huele" el agua). Con esta habilidad puede determinar de dónde procede un olor y así encontrar su alimento en el fondo lodoso. Aunque no es claro cómo lo logran estos crustáceos, es posible que perciban variaciones locales en la concentración y se muevan en la dirección hacia donde el olor aumenta más rápidamente.

Para describir cómo podemos diseñar una langosta mecánica que navegue por olfato, comenzamos suponiendo que nuestro artefacto sólo puede moverse sobre un plano. Sea $S(x, y)$ igual a la concentración en (x, y) de los productos químicos que conforman el olor de un pez muerto. Sabemos que en (x, y), la dirección en que S crece más rápidamente está dada por el vector gradiente

$$\nabla S(x, y) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right).$$

Supongamos que $S(x, y)$ está definida en el dominio $-2 \leq x \leq 2$,$-2 \leq y \leq 2$ por la fórmula

$$S(x, y) := \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + 8.$$

Dibujar suficientes vectores (unos 30) del campo vectorial $\nabla S(x, y)$ para conocer las trayectorias de la langosta en busca de los peces muertos. Trazar 5 curvas de nivel significativas de la función $S(x, y)$.