

Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 30 de noviembre de 2005, segundo examen orientativo.

Los Ejercicios 1 y 2 sirven para aprobar. Nota única de aprobado: 5 puntos. Nota de suspenso: de 0 a 3 puntos.

Los Ejercicios 3 y 4 se proponen para sacar notable (entre 7 y 8.9 puntos) o sobresaliente (9 puntos). Pero, también pueden servir para aprobar en el caso de fallos en los Ejercicios 1 y 2.

Ejercicio 1.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 - xy + y^3}{2 + x^4 + y^4}$$

es diferenciable en todo punto del plano.

Ejercicio 2.- Completar los detalles que faltan en la definición siguiente:

Se dice que una función $f(x, y, z)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0) si existen tres constantes a, b, c y tres funciones $\varepsilon_1(h, k, \ell)$, $\varepsilon_2(h, k, \ell)$, $\varepsilon_3(h, k, \ell)$ tales que

$$\lim_{(h, k, \ell) \rightarrow (0, 0, 0)} \varepsilon_i(h, k, \ell) = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

y para todos h, k, ℓ suficientemente pequeños en módulo, se tiene que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + \ell) - f(x_0, y_0, z_0) = ah + bk + c\ell + h\varepsilon_1(h, k, \ell) + k\varepsilon_2(h, k, \ell) + \ell\varepsilon_3(h, k, \ell).$$

Ejercicio 3.- (2'5 puntos) Estudiar si la función $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$ es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejercicio 4.- (2'5 puntos) (2.5 puntos) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en el punto $(1, -2)$.

1. Suponiendo que $f(1, -2) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 10$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 20$, hallar aproximadamente $f(0,99, -2,02)$.
2. Suponiendo que $f(1,01, -1,989) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 30$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 16$, hallar aproximadamente $f(1, -2)$.
3. Suponiendo que $f(0,998, -2,012) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = -17$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 32$, hallar aproximadamente $f(1,001, -2,003)$.