Cálculo y Álgebra, Curso 2006–2007

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 28 de noviembre de 2006, segundo examen orientativo.

Ejercicio 1.- Supongamos que la función $f(x, y, z)$ es diferenciable en el punto $(2, -1, 1)$. Hallar aproximadamente los valores de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, -1, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(2, -1, 1)$$

sabiendo que

$$\begin{aligned} f(2'00, -1'00, 1'00) &= 1'00, \\ f(2'01, -1'01, 1'02) &= 0'98, \\ f(1'97, -0'99, 1'01) &= 1'10, \\ f(1'99, -1'02, 0'98) &= 1'04. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.- Sea $f(x, y)$ una función definida en todo el plano. Sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1$$

y que para todo (x, y)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 + xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy^2 - 2,$$

demostrar que $f(x, y)$ es diferenciable en $(1, 1)$.

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Dados los puntos $P = (2, 2, 2 + \sqrt{2})$ y $Q = (3/2, 1, (4 - \sqrt{15})/2)$ de la esfera $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$, hallar la longitud del arco de círculo máximo que los une.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) (1) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores tales que para todo número real x se tiene que

$$\|\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b}\| \geq \|\boldsymbol{a}\|.$$

Demostrar que necesariamente $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

(2) Poner un ejemplo mediante el cual se pruebe que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son ortogonales, entonces existe un valor real x_0 tal que

$$\|\boldsymbol{a} + x_0\boldsymbol{b}\| < \|\boldsymbol{a}\|.$$