Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 19 de enero de 2004, cuarto examen orientativo.

Ejercicio 1.-
Comprobar que los puntos $(0,0), (1,0), (-1,0), (0,1)$ y $(0,-1)$ son los puntos críticos de la función

$$f(x,y) := (x^2 - 30y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}.$$

Averiguar la naturaleza de estos puntos (máximo, mínimo, punto de ensilladura) mediante la matriz hessiana.

Ejercicio 2.- Demostrar que no existe la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

de la función

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

¿En qué puntos del plano es diferenciable la función $f(x,y)$?

Ejercicio 3.- (2,5 puntos) Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en todo punto del plano $\mathbb{R}^2$. Sea (x_0, y_0) un punto dado y (a,b) un vector no nulo. Consideremos la función de t:

$$\varphi(t) := f(x_0 + ta, y_0 + tb).$$

Supongamos que la gráfica de $\varphi(t)$ viene dada por la Figura 1.

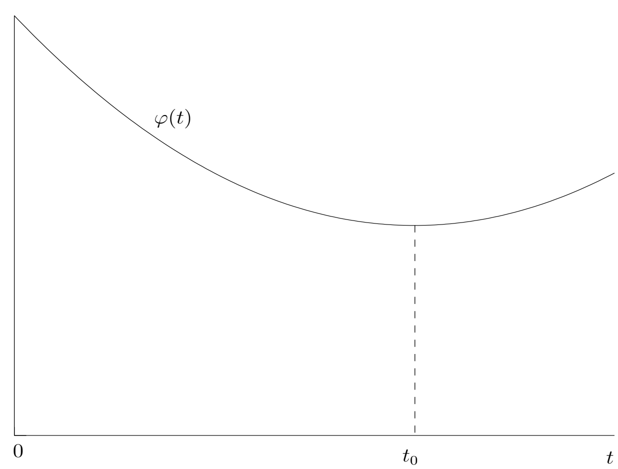

Figura 1: Gráfica de $\varphi(t)$.

Definamos el punto $(x_1, y_1) := (x_0 + t_0 a, y_0 + t_0 b)$. Utilizando la regla de la cadena, demostrar que la recta que une los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es tangente en el punto (x_1, y_1) a la curva de nivel $f(x, y) = f(x_1, y_1)$.

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Para cada una de las funciones $f(x,y)$ que figuran más abajo, se ha definido la función

$$\varphi(t) := f(1+2t, 1-t)$$

y se ha representado la gráfica de $\varphi(t)$ en la Figura 2.

1. $f(x,y) = (x^2+3y^2)\mathrm{e}^{(1-x^2-y^2)}$;
2. $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2$;
3. $f(x,y) = x^2y^3 + 2$;
4. $f(x,y) = (x-1)^3 + y + 1$;
5. $f(x,y) = -2x - y + 6$;
6. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 4$.

Emparejar cada gráfica de $\varphi(t)$ con la función $f(x,y)$ a la que está asociada. Razónese.

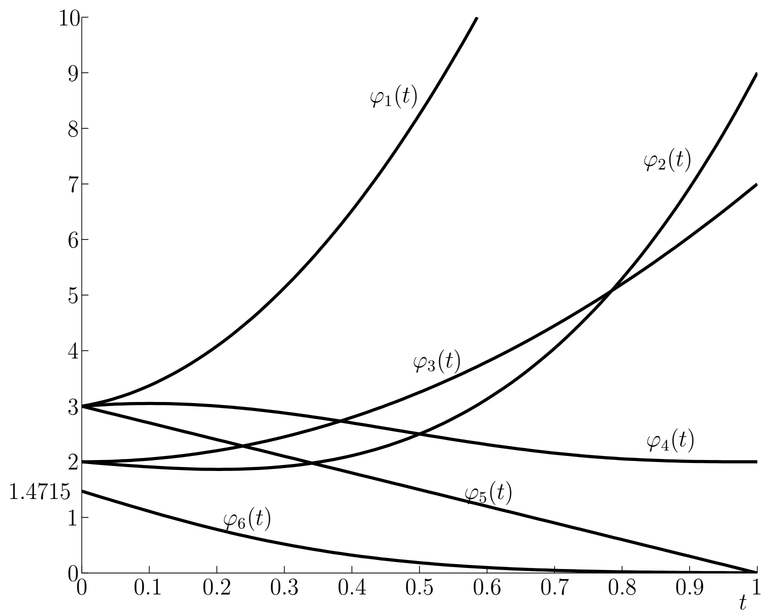

Figura 2: Gráficas de las $\varphi_i(t), i = 1,2,3,4,5,6$.