Cálculo y Álgebra

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 18 de enero de 2006, cuarto examen orientativo.

Ejercicio 1.- Sea $f(x,y)$ una función tal que

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 6x)\vec{\imath} + (6xy - 6y)\vec{\jmath} \tag{1}$$

Hallar los puntos críticos de $f(x,y)$ y averiguar su naturaleza (máximo relativo, mínimo relativo, punto de ensilladura) mediante la matriz hessiana.

Aunque hay infinitas funciones $f(x,y)$ que satisfacen la condición (1), ¿por qué las respuestas anteriores son las mismas para todas ellas? Explicarlo.

Ejercicio 2.- Hallar los dos planos tangentes al elipsoide

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{16} = 1$$

que son paralelos al plano $x + y + z = 45$.

Ejercicio 3.-(2,5 puntos) Mediante el criterio de mínimos, demostrar que para todo punto (x,y) del plano, se tiene que

$$x^2 - 3x + y^2 + 3y + 7 \geq \frac{5}{2}.$$

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) Sean $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ tres funciones para las que existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2),\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,2),\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,2),\ \frac{\partial h}{\partial x}(1,2),\ \frac{\partial h}{\partial y}(1,2)$$

y son iguales a cero. Las figuras 1, 2 y 3 muestran las gráficas de las funciones auxiliares

$$\varphi_1(t) := f(1+t, 2+t), \quad \varphi_2(t) := g(1+t, 2+t), \quad \varphi_3(t) := h(1+t, 2+t).$$

Una de las funciones $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ no puede ser diferenciable en $(1,2)$. ¿Cuál es? Razónese la contestación.

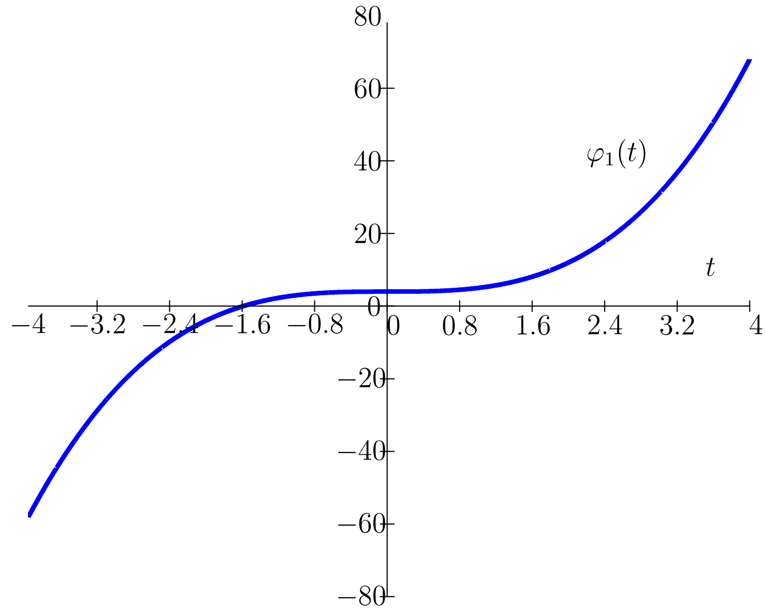

Figura 1: Gráfica de $\varphi_1(t)$

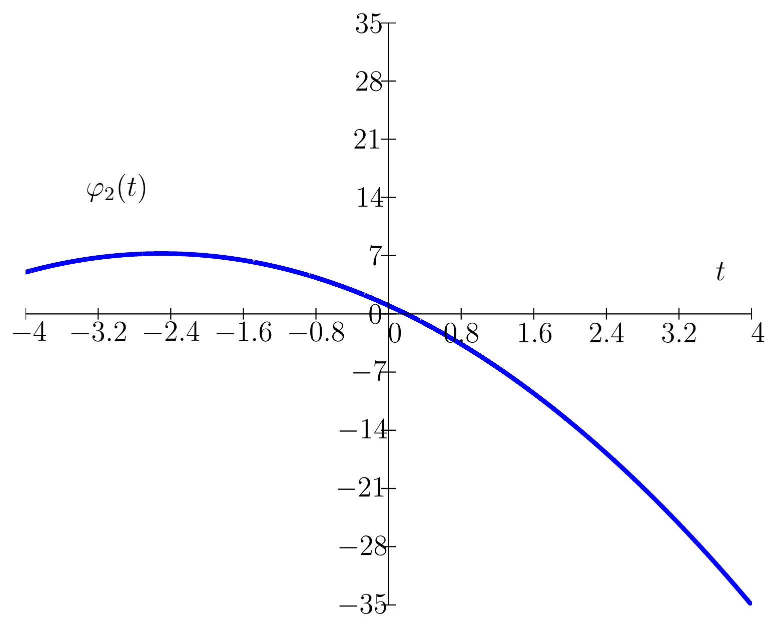

Figura 2: Gráfica de $\varphi_2(t)$

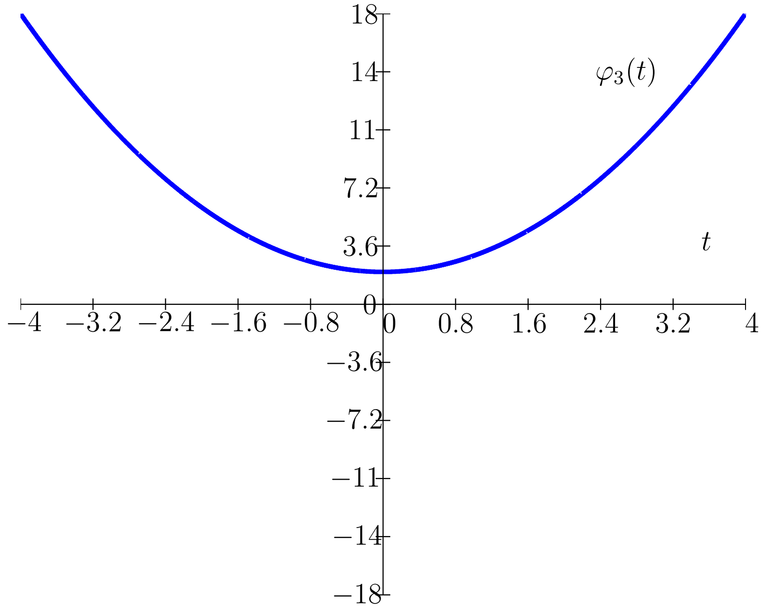

Figura 3: Gráfica de $\varphi_3(t)$