

Cálculo y Álgebra, Curso 2006–2007

Grupo 16 de 1º de Ciencias Ambientales, 17 de enero de 2007, cuarto examen orientativo.

Ejercicio 1.- Sea la función $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Probar que tiene un mínimo relativo y cuatro puntos de ensilladura.

Ejercicio 2.- Demostrar que la curva C

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1, \\ xy + xz = 2, \end{cases}$$

es tangente a la superficie S

$$xyz - x^2 - 6y = -6$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

Es decir, hay que demostrar que la recta tangente a la curva C en el punto $(1, 1, 1)$ está contenida en el plano tangente a la superficie S en el punto $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 3.- (2,5 puntos)

La diversidad de flores silvestres en una pradera se puede medir contando las margaritas, lirios, amapolas, etc., que hay en ella. Si hay en ella n tipos de flores silvestres, cada una con una proporción p_i de la población total, se cumple que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

A la n -tupla (p_1, p_2, \dots, p_n) le llamaremos la *distribución* de las flores. Como medida de la diversidad de toma

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) := - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

En esta definición se sobreentiende que $p_i \log_2 p_i := 0$ cuando $p_i = 0$. Se recuerda que

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Se pide:

- Hallar el máximo y mínimo valor de $H(p_1, p_2, p_3, p_4)$.
- Si la pradera contiene diez tipos de flores en proporciones muy parecidas, la diversidad ¿es mayor o menor que para una distribución similar con sólo cuatro clases de flores?
- Con diez tipos de flores, ¿qué distribución produce diversidad máxima?

- (d) Sea H_n la diversidad máxima para n tipos de flores. ¿Tiende H_n a algún límite cuando $n \rightarrow \infty$?

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) En cada una de las Figuras 1 y 2 aparecen dibujadas una curva de nivel de la función $P(x, y)$, una curva de nivel de la función $Q(x, y)$ y algunos vectores del campo vectorial $(P(x, y), Q(x, y))$.
¿Cuál de las dos figuras es contradictoria? Razónese.

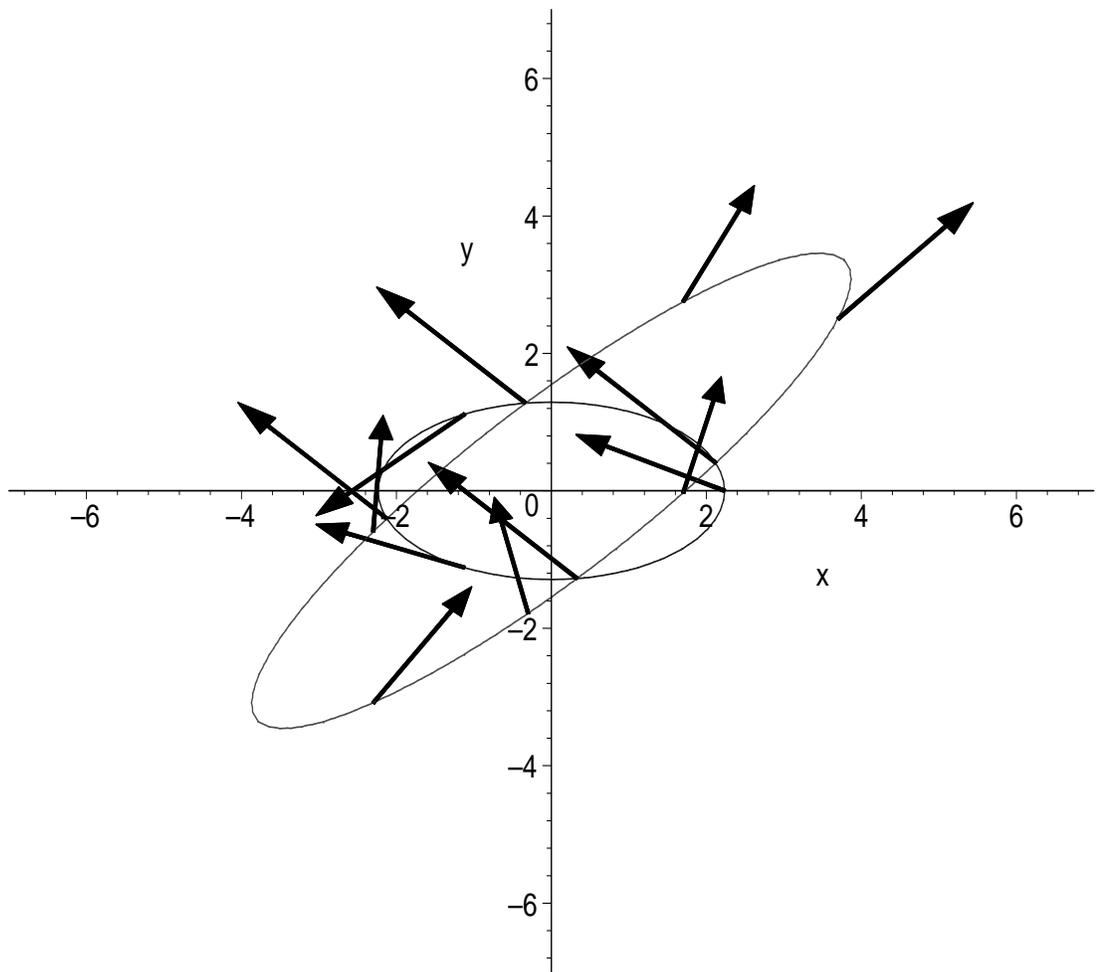


Figura 1: Campo vectorial.

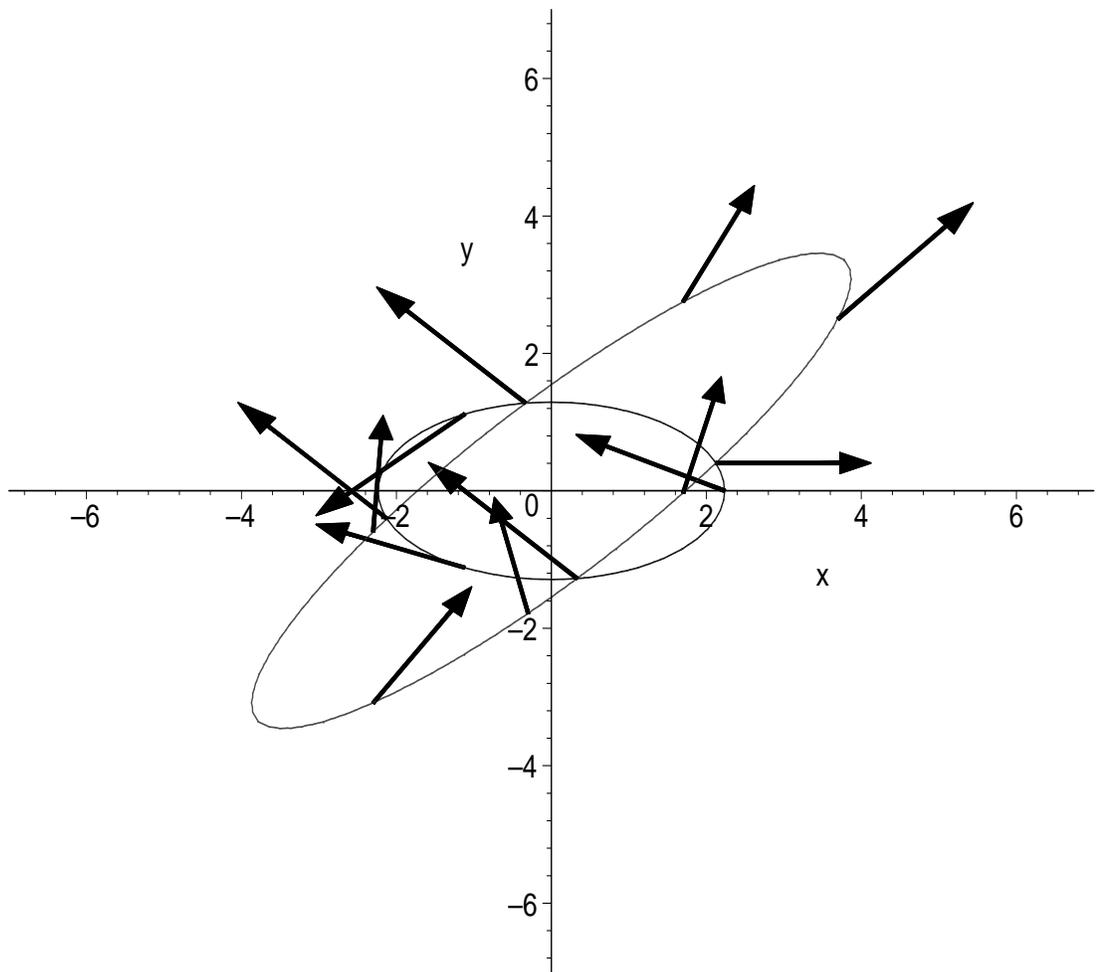


Figura 2: Campo vectorial.