Matemática Aplicada

1º Farmacia

Curso 2001-2002

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Logaritmos

Sea el número e definido por

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2'71828182844590....$$

Se define el *logaritmo neperiano o logaritmo en base el número* e, y se denota por ln, de la forma siguiente: para todo número $x > 0$ decimos que $\ln(x) = y$ si $\mathrm{e}^y = x$. Es decir, la función logaritmo neperiano es la inversa de la función exponencial.

Las propiedades más importantes de los logaritmos son:

- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad x, y > 0$,
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad x, y > 0$,
- $\ln(x^y) = y\ln(x), \quad x > 0$.

1.2. Derivadas

Consideremos una función f. Se dice que f es *derivable* en un punto x_0 si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A dicho límite se le llama *derivada de* f *en el punto* x_0, y se denota por $f'(x_0)$. Las derivadas cumplen las siguientes propiedades:

- $(\lambda f)' = \lambda f', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,
- $\Big(f(g)\Big)' = f'(g)g', \quad$ (*regla de la cadena*),

- $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$,   (*derivada de la función inversa*).

Hay un resultado muy importante, referido a la derivación de funciones, conocido como el teorema del valor medio, que dice lo siguiente:

Teorema del Valor Medio: *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Una consecuencia de este resultado es la siguiente: *si la función f es tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en dicho intervalo.*

1.3. Funciones de dos Variables

Una función de 2 variables reales es una aplicación f

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array}$$

siendo A un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo $t^2 - x^2 + 7$, $\ln(tx)$, $\operatorname{sen}(2t - 3x)$, son funciones de dos variables. Para este tipo de funciones se definen las *derivadas parciales* de la forma siguiente:

derivada parcial respecto a t:

$$f_t(t_0, x_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t, x_0) - f(t_0, x_0)}{t - t_0}.$$

Es decir, calculamos la derivada de la función $f(t, x_0)$, *que es de una variable* en el punto t_0.

De forma análoga se define *derivada parcial respecto a x*:

$$f_t(t_0, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(t_0, x) - f(t_0, x_0)}{x - x_0}.$$

Es decir, calculamos la derivada de la función $f(t_0, x)$, *que es de una variable* en el punto x_0.

Para el cálculo de las derivadas parciales se utilizan las mismas reglas que en el caso de funciones de una variable. Así, por ejemplo, para la función:

$$f(t, x) = \operatorname{sen}(tx) + 2t + x + \cos(t^2) + (tx)^3,$$

resulta que sus derivadas parciales son

$$f_t = x\cos(tx) + 2 - 2t\operatorname{sen}(t^2) + 3x^3t^2, \qquad f_x = t\cos(tx) + 1 + 3t^3x^2.$$

Con frecuencia aparecen relaciones que dependen de dos variable, pero no se puede despejar una en función de otra. Por ejemplo sea

$$F(t, x) = t + x + \operatorname{sen}(tx) + \cos(2 + t^2 + x^3) = 0. \tag{1.1}$$

Si damos un valor a la variable t obtendremos uno (o varios) para la x, pero no podemos despejar la variable x en función de t. Es decir, no existe ninguna función f de manera que la ecuación $F(t, x) = 0$

sea equivalente a $x = f(t)$. En este caso, se dice que la variable x está *definida implícitamente como función de la variable* t, o también se dice que t *define implícitamente a* x. El caso contrario es el de una variable que define *explícitamente* a otra. Por ejemplo $x = 2 + t + \cos(1 + t^2)$.

Así entonces, en la expresión (**??**) no podemos despejar x en función de t. Pero nos podemos preguntar por la derivada: ¿se podrá calcular? La respuesta es "afirmativa" a medias. Si es posible calcular la derivada de x respecto a t, aunque la expresión obtenida contendrá, en general, a las dos variables. El resultado que permite calcular esa derivada es conocido como *teorema de la función implícita*, y dice lo siguiente:

sea $F(t, x) = 0$. *Entonces*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_t}{F_x}.$$

Con este resultado, en el ejemplo que nos ocupa, resulta que

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1 + x\cos(tx) - 2t\ \mathrm{sen}(2 + t^2 + x^3)}{1 + t\cos(tx) - 3x\ \mathrm{sen}(2 + t^2 + x^3)}.$$

Observemos que este resultado vale para las funciones definidas en forma explícita. Así, si consideramos $x = 2 + t + \cos(1 + t^2)$, podemos escribirla como $F(t, x) = x - 2 - t - \cos(1 + t^2) = 0$. Luego

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{-1 + 2t\ \mathrm{sen}(2 + t^2)}{1} = 1 - 2t\ \mathrm{sen}(2 + t^2).$$

1.4. Integrales

Consideremos una función de una variable $f(x)$. Si $F(x)$ es otra función tal que su derivada en f, es decir $F'(x) = f(x)$ (para todo x de un intervalo), entonces se dice que F es una *primitiva* o *integral indefinida* de f. Dado que todas las primitivas de una función difieren en una constante, entonces tenemos que el conjunto de primitivas de $f(x)$ es $F(x) + C$, con C recorriendo $\mathbb{R}$. Al conjunto de primitivas de $f(x)$ se denota por

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La integral definida aparece en el cálculo de áreas de regiones del plano, limitadas por una función f. Así, si $f(x)$ es no negativa en el intervalo $[a, b]$, por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

denotamos al área de la región del plano limitada por la curva $f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Este concepto se extiende, de hecho, a funciones $f(x)$ no necesariamente no negativas. El cálculo de integrales definidas viene dado por la regla de Barrow, que dice:

Regla de Barrow: *sea* $F(x)$ *una primitiva cualquiera de la función* $f(x)$. *Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a).$$

Otro resultado importante de la integración es el siguiente:

Teorema Fundamental del Cálculo Integral: *sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y c un número de dicho intervalo. Entonces, la función*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definida para todo $x \in [a,b]$, es derivable en todo punto del intervalo, siendo

$$F'(x) = f(x).$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Integración por partes.

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)g(x) \;-\; \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integración por cambio de variable.

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.5. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas mas usuales son

Función	**Denotada por**	**Función**	**Denotada por**
seno	$\operatorname{sen}(x)$	coseno	$\cos(x)$
tangente	$\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	cotangente	$\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$
secante	$\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$	cosecante	$\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

Sus funciones inversas, que se denominan *arco*, es decir arco seno, arco cotangente, son

Función	**Denotada por**	**Función**	**Denotada por**
arco seno	$\operatorname{arc\,sen}(x)$	arco coseno	$\operatorname{arc\,cos}(x)$
arco tangente	$\arctan(x)$	arco cotangente	$\operatorname{arccot}(x)$
arco secante	$\operatorname{arcsec}(x)$	arco cosecante	$\operatorname{arccsc}(x)$

Las funciones trigonométricas cumplen diversas propiedades, que son muy útiles a la hora de resolver ciertas integrales. Vamos a reunir algunas de ellas en la siguiente tabla.

$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b)$	$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$	$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$
$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\big)$	$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

1.6. Funciones Hiperbólicas

Para las funciones hiperbólicas, comenzaremos definiendo el seno y coseno hiperbólicos.

$$\textit{seno hiperbólico: } \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \textit{coseno hiperbólico: } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

De igual manera al caso de las funciones trigonométricas, se definen el resto de las funciones hiperbólicas. Sus inversas se llaman, usualmente, *argumento*. Así, por ejemplo, la función inversa del coseno hiperbólico es el *argumento del coseno hiperbólico* y se denota por $\operatorname{Argcosh}(x)$.

1.7. Tabla de derivadas

Función=$f(x)$	**Derivada**=$f'(x)$	**Función**=$f(x)$	**Derivada**=$f'(x)$
c	0	x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x	$\ln(x)$	x^{-1}
a^x	$a^x \ln(a)$	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\tan(x)$	$\cos^{-2}(x)$
$\cot(x)$	$-\operatorname{sen}^{-2}(x)$	$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$	$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcsec}(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc}(x)$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$		

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1. Introducción. Modelos Matemáticos

La teoría de *ecuaciones diferenciales*, desde su nacimiento en tiempos de Newton y Leibniz hasta nuestros días, ha estado influenciada por sus múltiples contactos con la Ciencia y la Tecnología. De dichos contactos ha obtenido continua inspiración, transformando problemas físicos en problemas matemáticos y a veces en completas teorías matemáticas. Así entonces, previamente al estudio de las ecuaciones diferenciales, vamos a considerar un ejemplo sencillo de problema físico y la ecuación diferencial que lo describe, cuya resolución nos determinará la solución del problema original.

Ejemplo: *Un depósito de* 100 *litros de capacidad está lleno de una solución salina de* $0'1$ *kilogramos/litro. A partir de un determinado instante,* (ver figura 2.1)

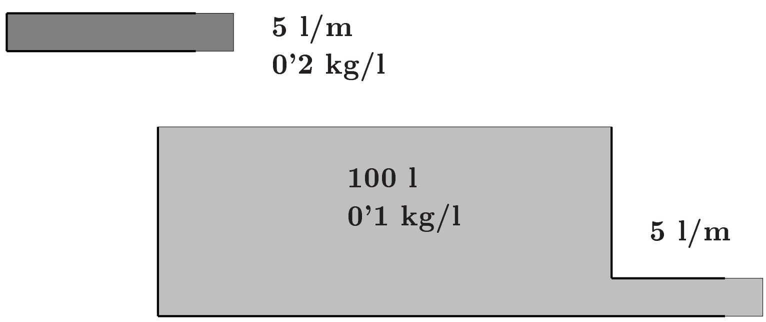

Figura 2.1

fluye al depósito una solución salina de $0'2$ *kilogramos/litro de concentración, a razón de* 5 *litros/minuto, saliendo por un sumidero líquido del depósito a la misma velocidad. Queremos determinar la cantidad de sal presente en el depósito a los t minutos de comenzar el proceso.*

Denotemos por $x(t)$ a la cantidad de sal presente en el depósito a los t minutos de comenzar el proceso; notemos que $x(0) = 10$ kg. Nuestro objetivo es tratar de precisar, tanto como nos sea posible, la función $x(t)$. Para simplificar el problema, vamos a suponer que la velocidad de entrada, y por lo tanto la de salida, del líquido en el depósito es constante (igual a 5 l/m); igualmente supondremos también que la mezcla de líquidos en el depósito se hace homogénea al instante.

Ahora, vamos a considerar $h > 0$ y el intervalo de tiempo $[t, t+h]$. Si denotamos por Δx a la *variación de la cantidad de sal presente en el depósito en el intervalo de tiempo* $[t, t+h]$, tenemos que

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = \text{sal que entra - sal que sale.} \tag{2.1}$$

De otro lado, la cantidad de sal que entra en el depósito en el intervalo $[t, t+h]$, se deduce inmediatamente, siendo

$$\text{sal que entra} = 0'2\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}\,5\,\frac{\text{l}}{\text{m}}\,h\,\text{m} = h\,\text{kg}. \tag{2.2}$$

Para determinar la cantidad de sal que sale del depósito en dicho intervalo, tenemos la dificultad de que la concentración de sal en el líquido que sale (que es la concentración de sal en el depósito) *no permanece constante* a lo largo del intervalo $[t, t+h]$. Para "salvar" este problema vamos a considerar el hecho siguiente: supongamos que h es "muy pequeño". Entonces, en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ la concentración de sal en el depósito no varía prácticamente, siendo aproximadamente igual a $x(t)/100$ kg/l. Así, de forma aproximada, podemos determinar la cantidad de sal que sale del depósito en el intervalo $[t, t+h]$, siendo

$$\text{sal que sale} \simeq \frac{x(t)}{100}\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}\,5\,\frac{\text{l}}{\text{m}}\,h\,\text{m} = \frac{x(t)}{20}\,h\,\text{kg}.$$

Vamos a imponer la condición de que

$$\text{sal que sale} = \frac{x(t)}{20}\,h\,\text{kg}, \tag{2.3}$$

que es el modelo matemático considerado para este problema. Con estas precisiones, sustituyendo las igualdades (2.2) y (2.3) en (2.1) obtenemos

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = h - \frac{x(t)}{20}\,h\,\text{kg}. \tag{2.4}$$

Dividiendo ahora por h en ambos términos, y tomando el límite cuando $h \to 0$, resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 - \frac{x(t)}{20},$$

es decir

$$x'(t) = 1 - \frac{x(t)}{20}. \tag{2.5}$$

Esta última ecuación, en la que aparecen *derivadas de funciones*, en concreto $x'(t)$, es una ecuación diferencial, que describe el problema físico planteado. Así entonces, una *ecuación diferencial* es una relación funcional en la que aparece una función y sus derivadas sucesivas, hasta un determinado orden de derivación. Si la función depende de una sola variable la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria*; si depende de varias variables, la ecuación se denomina *ecuación en derivadas parciales.* Este curso se limitará al estudio de algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones que, en general, pueden expresarse de la forma

$$F\Big(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n)}(t)\Big) = 0. \tag{2.6}$$

Así mismo, se llama *orden* de una ecuación diferencial al de la derivada más alta que figure en ella, por ejemplo:

ecuación diferencial	orden
$tx(t) + x''(t) = 0$	2
$x'(t) = 1$	1
$x''(t) + x^{iv)}(t) = t$	4

De una ecuación diferencial lo que nos interesa resolverla, es decir calcular una o varias soluciones de dicha ecuación. Pero antes, habremos de precisar con exactitud qué entendemos por una solución de una ecuación diferencial. Una función $u(t)$ se dice que es *una solución* o *una solución particular* de la ecuación (2.6) si cumple lo siguiente:

- está definida en un intervalo $I \in \mathbb{R}$,
- es derivable n veces en dicho intervalo,
- $F\Big(t, u(t), u'(t), u''(t), \ldots, u^{n)}(t)\Big) = 0, \forall t \in I.$

Observación: el intervalo I puede ser de cualquiera de las siguientes formas $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ o $[a, b)$.

A la vista de la definición de solución de una ecuación diferencial, la primera cuestión que aparece es la siguiente: ¿Cuantas soluciones tiene, o puede tener, una ecuación diferencial? En el siguiente ejemplo veremos que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones.

Ejemplo: Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$x''(t) = 0. \tag{2.7}$$

Observemos que cualquier polinomio de grado 1 es una solución de dicha ecuación diferencial; incluso todo polinomio de grado 0 también es solución. Así entonces, tenemos que todas las funciones de la forma

$$At + B, \quad A, B \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

son soluciones de la ecuación diferencial (2.7). Además, en este caso, todas las soluciones de esta ecuación son de la forma anterior, puesto que las únicas funciones cuyas derivada segunda es idénticamente 0, son los polinomios de grado a lo sumo 1. Luego, en este caso, todas las soluciones de (2.7) están “agrupadas” según la expresión dada en (2.8), de manera que para cualquier elección de los parámetros A y B obtenemos una solución particular de la ecuación (2.7). Por ejemplo, con $A = 2$, $B = 3$ obtenemos como solución particular $2t + 3$. La expresión (2.8) se llama solución general de la ecuación (2.7). Resumiendo, es decir, en este caso, todas las soluciones se pueden agrupar en una familia de curvas (solución general) que depende de 2 parámetros, de manera que para cualquier particularización de los dos parámetros obtenemos una solución particular. Además, la familia de curvas (solución general) depende de dos parámetros, que coincide con el orden de la ecuación diferencial.

En general, se denomina *solución general* de la ecuación diferencial (2.6) a una función del tipo $U(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ con n parámetros (tantos como el orden de la ecuación diferencial), derivable n veces en el intervalo I, de manera que cualquier particularización de los parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ es una solución particular. En resumen, la solución general es una *familia de curvas*, siendo cada una de ellas una solución particular.

No es cierto, para todas las ecuaciones diferenciales, que todas sus soluciones particulares estén contenidas en la solución general. En el siguiente ejemplo lo vamos a ver.

Ejemplo: La ecuación diferencial

$$tx'(t) + \Big(x'(t)^2 - x(t)\Big) = 0,$$

tiene como solución general

$$x(t) = Ct + C^2,$$

pero, como puede comprobarse, la función $x(t) = -t^2/4$ es una solución que no puede obtenerse para ninguna particularización del parámetro C. Este tipo de soluciones se llaman *soluciones singulares*, y su estudio queda fuera de los contenidos de este curso.

Hasta ahora, lo que hemos hecho es construir una familia de curvas (solución general) partiendo de una ecuación diferencial. Un problema inverso consiste en obtener la ecuación diferencial de una familia de curvas que dependen de n parámetros. Veamos con dos ejemplos esta cuestión.

Ejemplo: *Encontrar la ecuación diferencial de la familia de curvas*

$$x(t) = At + B.$$

Solución. Derivando, obtenemos que $x'(t) = A$, y derivando nuevamente

$$x''(t) = 0$$

que es la ecuación diferencial de la familia de curvas, de segundo orden puesto que la familia de curvas depende de dos parámetros.

Ejemplo: *Encontrar la ecuación diferencial de la familia de curvas*

$$x(t) = A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{t} + C.$$

Solución. Derivando sucesivamente hasta el orden 3 (el número de parámetros), obtenemos

$$x'(t) = 2A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{t}, \qquad x''(t) = 4A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{t}, \qquad x'''(t) = 8A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{t}.$$

Luego

$$x'''(t) - x''(t) = 2\Big(x''(t) - x'(t)\Big),$$

es decir

$$x'''(t) - 3x''(t) + 2x'(t) = 0.$$

Notemos que es una ecuación diferencial de orden 3.

A la vista de estos dos ejemplos, un método para obtener la ecuación diferencial de una familia de curvas que dependen de n parámetros, consiste en ir calculando las derivadas sucesivas, hasta el orden n y, de estas n ecuaciones obtenidas, despejar los n parámetros.

La última cuestión que vamos a comentar en esta sección es la siguiente: supongamos que tenemos una ecuación diferencial. Una primera pregunta que surge es la siguiente: ¿tendrá solución?. Supongamos que sí. Supongamos también que la hemos resuelto. Es decir, hemos obtenido la solución general. Pero de estas infinitas soluciones ¿Cual nos interesa? Por ejemplo, en el ejemplo del depósito, si resolvemos la ecuación (2.5) obtendremos una familia de curvas que dependen de un parámetro (es una ecuación diferencial de orden 1). De esas infinitas soluciones hemos de elegir alguna que sea la que represente, de alguna manera, la evolución del problema físico planteado. Lo deseable sería que solamente una de esas soluciones sea la que represente el proceso, es decir que el proceso físico evolucione sólo de una manera posible, lo que entra dentro de la lógica.

Para resolver esta cuestión, es decir, de las infinitas soluciones ¿con cual nos quedamos?, lo que haremos será imponer unas propiedades adicionales que han de cumplir las soluciones de la ecuación diferencial, de manera que podamos "eliminar" todas las soluciones salvo una. Dichas propiedades consisten en imponer que las soluciones y sus derivadas pasen por unos determinados puntos. Esto es lo que se conoce como *condiciones iniciales.* Así, lo que haremos será resolver *problemas de condiciones iniciales* que consisten en una ecuación diferencial y unas *condiciones adicionales* que, usualmente, consisten en imponer los valores en un punto de la solución y sus derivadas hasta el orden $n-1$. Así para la ecuación diferencial (2.6) un problema de condiciones iniciales sería

$$\begin{cases} F\Big(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n)}(t)\Big) = 0, \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_1) = x_1, \\ \vdots \\ x^{n-1)}(t_{n-1}) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Observemos que el número de condiciones n es el orden de la ecuación diferencial.

Así entonces, resolver el anterior problema de condiciones iniciales consiste en encontrar soluciones $u(t)$ de la ecuación diferencial (2.6) que cumplan además $u^{i)}(t_i) = x_i$ para $i = 1, 2, \ldots n-1$.

En el ejemplo del depósito, con la ecuación diferencial (2.5), utilizando que $x(0) = 10$ kg., el problema de condiciones iniciales es

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \dfrac{x(t)}{20}, \\ x(0) = 10. \end{cases} \tag{2.9}$$

El proceso de resolución de un problema de condiciones iniciales consiste, generalmente, en obtener la solución general de la ecuación diferencial, que depende de n parámetros. Posteriormente, con las n condiciones iniciales, obtenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (los parámetros) que nos permitirá despejar dichos parámetros y obtener la solución particular. Veamos con un ejemplo cómo se realiza este segundo paso.

Ejemplo: *dada la familia de curvas $x(t) = At^2 + Bt + C$, determinar la función que cumple: $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$, $x''(1) = 2$.*

Solución. Derivando $x(t)$, resulta que $x'(t) = 2At + B$ y $x''(t) = 2A$. Ahora, con las tres condiciones dadas, obtenemos:

$$\begin{cases} x(1) = 1 & \Leftrightarrow \quad A + B + C = 1 \\ x'(1) = 0 & \Leftrightarrow \quad 2A + B = 0 \\ x''(1) = 2 & \Leftrightarrow \quad 2A = 2. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos respectivamente, $A = 1$, $B = -2$ y $C = 1$. Luego, la función buscada es $x(t) = t^2 - 2t + 1$.

Ya para concluir, en este capítulo abordaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en las cuales la derivada $x'(t)$ "está despejada". Concretamente, los problemas de condiciones iniciales que trataremos serán de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = F\Big(t, x(t)\Big), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

o bien, utilizando la notación $x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

2.2. Ecuaciones Diferenciales de Variables Separadas

Se dice que una ecuación diferencial es de *variables separadas* si mediante operaciones algebraicas puede expresarse de la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{g(t)}{f(x)}} \tag{2.10}$$

siendo $f(x)$ una función que depende sólo de la variable x y $g(t)$ dependiendo solamente de t. La técnica de resolución de este tipo de ecuaciones es conocida como *separación de variables*. Veamos en qué consiste este método. El primer paso consiste en escribir la ecuación (2.10) en la forma

$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t,$$

de manera que las variables queden separadas, con x sólo en el primer miembro de la igualdad y t en el segundo. Ahora, tomando integrales indefinidas en ambos miembros, obtenemos

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t\ + C} \tag{2.11}$$

siendo C una constante arbitraria. Para cada C (posiblemente restringida a un subconjunto de $\mathbb{R}$) la función resultante en (2.11) proporcionará una solución de la ecuación (2.10). Veamos este método con un ejemplo.

Ejemplo: *Resolver la ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2t}{x}.$$

Solución. Separando las variables, obtenemos $x\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$. Ahora, según la fórmula (2.11), tomando integrales indefinidas, resulta

$$\int x\,\mathrm{d}x = -\int 2t\,\mathrm{d}t\ + C$$

es decir $x^2 = -2t^2 + 2C$, o lo que es lo mismo

$$x^2 + 2t^2 = C.$$

Notemos que en la solución general obtenida, obtenemos soluciones particulares para todo $C > 0$, puesto que una función de la forma $x^2 + 2t^2 = -1$ no tiene sentido (en los números reales). Además, si $C = 0$, la función $x^2 + 2t^2 = 0$ no está definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, sólo en el punto 0, por lo que no puede ser una solución de la ecuación diferencial.

Resuelta la ecuación diferencial, es conveniente comprobar si la solución general obtenida es realmente solución. En este caso, vamos a aplicar el resultado correspondiente a la derivación de funciones implícitas. Así, en primer lugar, ponemos la solución general en la forma $F(x, t) = 0$, es decir $x^2 + 2t^2 - C = 0$. Ahora, aplicando la fórmula de la derivación de la función implícita, resulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_t}{F_x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2t}{x},$$

lo que prueba que $x^2 + 2t^2 = C$ es solución.

La siguiente cuestión es resolver el problema de condiciones iniciales asociado a este tipo de ecuaciones diferenciales, es decir resolver

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{g(t)}{f(x)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} \tag{2.12}$$

Para resolver dicho problema, vamos a recurrir a la solución general de la ecuación diferencial que viene dada en la expresión (2.11). Así, sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y $G(t)$ de $g(t)$. Entonces la solución general viene dada por $F(x) = G(t) + C$. Ahora, imponiendo la condición inicial, resulta que $F(x_0) = G(t_0) + C \Rightarrow C = F(x_0) - G(t_0)$. Por lo tanto, la solución particular del problema (2.12) viene dada por

$$F(x) = G(x) + F(x_0) - G(t_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) - F(x_0) = G(t) - G(t_0).$$

Pero, al ser $F(x)$ y $G(t)$ funciones primitivas de $f(x)$ y $g(t)$ respectivamente, por la regla de Barrow, la igualdad anterior se traduce en

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} g(t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

que es la expresión de la solución del problema de condiciones iniciales (2.12).

Ejemplo: *Resolver el problema de condiciones iniciales* (2.9) *que representa al problema del depósito de la sección anterior*

Solución. El problema considerado es

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \dfrac{x}{20} = \dfrac{20 - x}{20}, \\ x(0) = 10. \end{cases}$$

Como la ecuación diferencial es de variables separadas, según la fórmula (2.13) la solución es

$$\int_{10}^{x} \frac{20}{20 - x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{t} \mathrm{d}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad -20\ln(20 - x) + 20\ln(10) = t,$$

es decir

$$x = 20 - 10\mathrm{e}^{\frac{-t}{20}}.$$

Falta ahora comprobar que efectivamente la función anterior es solución de (2.9). En primer lugar, es claro que cumple la condición inicial, puesto que al sustituir $t = 0$, resulta que $x = 20 - 10\mathrm{e}^{\frac{0}{20}} = 20 - 10 = 10$. Además, derivando respecto a t obtenemos

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{-t}{20}}}{2} = \frac{20 - x}{20}.$$

La otra forma de resolver este problema sigue de la obtención de la solución general de la ecuación diferencial, y con la condición inicial obtener el valor particular de la constante C. Veamos como se hace. En primer lugar, aplicando la fórmula (2.11), resulta que la solución general es

$$\int \frac{20}{20 - x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad -20\ln(20 - x) = t + C,$$

es decir

$$x = 20 - \mathrm{e}^{\frac{-t-C}{20}}.$$

Ahora, como $x(10) = 10$, resulta que

$$10 = 20 - \mathrm{e}^{\frac{-C}{20}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{-C}{20}} = 10,$$

luego, sustituyendo este valor en la solución general resulta finalmente

$$x = 20 - 10\mathrm{e}^{\frac{-t}{20}}.$$

2.2.1. Homogéneas

Una función $H(t,x)$ se dice *homogénea de grado* n si para todo $k \in \mathbb{R}$ se cumple que $H(kt,kx) = k^n H(t,x)$. Por ejemplo, son funciones homogéneas:

función	grado
$t + x + \sqrt{2tx}$	1
$x\,\mathrm{sen}(t/x) - t\cos(x/t)$	1
$2x^2 - 7t^3/x$	2

Se dice que una ecuación diferencial es *homogénea* si puede expresarse en la forma

$$\boxed{M(t,x)\mathrm{d}t + N(t,x)\mathrm{d}x = 0} \tag{2.14}$$

con M y N funciones homogéneas del mismo grado.

Las ecuaciones diferenciales de este tipo pueden reducirse a ecuaciones diferenciales de variables separadas. Para ello, basta con realizar el cambio de variable $x = tu$. Observando que $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u$ y suponiendo que M y N son homogéneas de grado n, la ecuación diferencial (2.14) se transforma en

$$M(t,tu)\mathrm{d}t + N(t,tu)(u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u) = 0 \Rightarrow t^n M(1,u)\mathrm{d}t + t^n N(1,u)(u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u) = 0.$$

Ahora, simplificando t^n, resulta

$$\Big(M(1,u) + N(1,u)u\Big)\mathrm{d}t + N(1,u)t\mathrm{d}u = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{M(1,u) + N(1,u)u}{N(1,u)}\frac{1}{t}$$

que es efectivamente una ecuación de variables separadas.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

Ejemplo: *Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} (t^2 - 2x^2)\mathrm{d}t + 2tx\mathrm{d}x = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar como las funciones $t^2 - 2x^2$ y $2tx$ son homogéneas del mismo grado (grado 2), la ecuación diferencial anterior es homogénea. Ahora, haciendo el cambio $x = tu$, y como $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u$, resulta que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2u}\frac{1}{t},$$

que es efectivamente una ecuación de variables separadas. Luego, utilizando la fórmula (2.11) de la solución general para este tipo de ecuaciones diferenciales, resulta

$$u^2 = C - \ln(t),$$

y como $u = x/t$, obtenemos

$$x^2 = t^2\Big(C - \ln(t)\Big),$$

que es la solución general de la ecuación diferencial anterior. Finalmente, al ser $x(1) = 0$, $C = 0$. Luego la solución del problema de condiciones iniciales es

$$x^2 = -t^2 \ln(t).$$

Falta comprobar que es efectivamente solución. La condición inicial la cumple. En segundo lugar, para comprobar que efectivamente es solución de la ecuación diferencial, nos basamos en la derivación de funciones implícitas. Así, en primer lugar, ponemos la solución general en la forma $F(x,t) = 0$, es decir $x^2 + 2t^2 \ln(t) = 0$. Ahora, aplicando la fórmula de la derivación de la función implícita, resulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_t}{F_x} = -\frac{2t\ln(t) + t}{2x} = \frac{x}{t} - \frac{t}{x}.$$

Pero como de la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{t^2 - 2x^2}{2tx} = \frac{x}{t} - \frac{t}{x},$$

resulta que la función $x^2 = -t^2 \ln(t)$ es solución de la ecuación diferencial.

2.2.2. Reducibles a Homogéneas

Consideremos la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\left(\frac{at + bx + c}{a't + b'x + c'}\right)} \tag{2.15}$$

siendo $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Este tipo de ecuaciones diferenciales pueden reducirse a ecuaciones diferenciales homogéneas o bien de variables separadas. Veamos todos los casos posibles.

CASO 1 $c = c' = 0$. *La ecuación* (2.15) *es homogénea.*

Efectivamente. Si $c = c' = 0$, (2.15) se traduce en

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F\left(\frac{at + bx}{a't + b'x}\right).$$

Ahora, haciendo el cambio $x = tu$, como $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u$, resulta que

$$\frac{u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F\left(\frac{at + btu}{a't + b'tu}\right) = F\left(\frac{a + bu}{a' + b'u}\right) = G(u).$$

Luego, realizando operaciones, resulta finalmente que

$$\Big(u - G(u)\Big)\mathrm{d}t = t\mathrm{d}u,$$

que es una ecuación de variables separadas.

CASO 2 *Si c y c' no se anulan simultáneamente y las rectas*

$$
\begin{aligned}
at + bx + c &= 0 \\
a't + b'x + c' &= 0
\end{aligned}
$$

se cortan en un punto (α, β), realizando el cambio $t = \alpha + u, x = \beta + v$, resulta que

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{a(\alpha+u) + b(\beta+v) + c}{a'(\alpha+u) + b'(\beta+v) + c'}\right) = F\left(\frac{au + bv}{a'u + b'v}\right)
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
a\alpha + b\beta + c &= 0 \\
a'\alpha + b'\beta + c' &= 0.
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación diferencial que hemos obtenido es

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F\left(\frac{au + bv}{a'u + b'v}\right)
$$

que es homogénea, como hemos visto en el CASO 1.

CASO 3 *Por último, si las rectas*

$$
\begin{aligned}
at + bx + c &= 0 \\
a't + b'x + c' &= 0
\end{aligned}
$$

son paralelas, es decir no se cortan en ningún punto, existe un número real k tal que

$$
at + bx = k(a't + b'x).
$$

Haciendo ahora el cambio de variable $u = a't + b'x$, la ecuación (2.15) se transforma en

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u - a'\mathrm{d}t}{b'\mathrm{d}t} = F\left(\frac{ku + c}{u + c'}\right) = f(u).
$$

que es de variables separadas.

Ejemplo: *Resolver la ecuación diferencial:*

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t + x - 1}{3t - x + 5}
$$

Solución. Como las rectas

$$
\begin{aligned}
x + t - 1 &= 0 \\
3t - x + 5 &= 0
\end{aligned}
$$

se cortan en el punto $(-1, 2)$, realizando el cambio $t = -1 + u, x = 2 + v$, resulta que la ecuación diferencial se convierte en

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{u + v}{3v - u},
$$

que es homogénea, como puede comprobarse. Resolviendo y deshaciendo los cambios de variable considerados, queda finalmente la solución general de la ecuación diferencial de la forma:

$$C(x-2)^2 = (t+1)\mathrm{e}^{3\arctan\left(\frac{x-2}{t+1}\right)}.$$

Ejemplo: *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t-x+3}{2x-2t+1}.$$

Solución. Como las rectas

$$\begin{aligned} t-x+3 &= 0 \\ 2x-2t+1 &= 0 \end{aligned}$$

son paralelas, haciendo el cambio de variable $u = t - x$, la ecuación se transforma en

$$1 - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u+3}{-2u+1} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{3u+2}{2u-1},$$

que es efectivamente de variables separadas. Resolviendo, queda finalmente:

$$t + C = \frac{2}{3}(x-t) - \frac{7}{9}\ln\Big(3(t-x)+2\Big).$$

2.3. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x + b(t)} \tag{2.16}$$

se llama *ecuación diferencial lineal de primer orden*. En esta sección vamos a suponer que

- a y b están definidas y son continuas en un intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, vamos a considerar primeramente un caso mas simple. Concretamente el caso en que la función b es idénticamente 0 en el intervalo I. Así tenemos

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x} \tag{2.17}$$

llamada ecuación *homogénea* o *reducida* de la ecuación (2.16). Esta última ecuación puede resolverse por el método de separación de variables, pero vamos a precisar todavía más. Vamos a determinar "todas" las soluciones de la ecuación (2.17), problema que queda resuelto en el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea $t_0 \in I$. Entonces bajo la hipótesis de continuidad de la función $a = a(t)$ en el intervalo I, una función $u : I \to \mathbb{R}$ es solución de* (2.17) *si y sólo si existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$ se tiene que*

$$\boxed{u(t) = K\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}} \tag{2.18}$$

Demostración. Primero, vamos a demostrar que si u es solución de la ecuación (2.17), entonces es de la forma dada en (2.18). Supongamos pues que u es solución de (2.17). Queremos demostrar que

$$u(t) = K\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s},$$

o lo que es equivalente, puesto que la exponencial siempre es $\neq 0$,

$$u(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = K,$$

o, por el teorema del valor medio, lo que es lo mismo

$$\left(u(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\right)' = 0 \,\text{para todo}\, t \in I.$$

Vamos a comprobar que se cumple esta última igualdad. Primero, como por hipótesis $a(t)$ es continua en I, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, la función

$$u(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

es derivable en I. Su derivada es

$$\left(u(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\right)' = u'(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} - u(t)a(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} =$$

$$= (u'(t) - a(t)u(t))\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Pero como hemos supuesto que $u(t)$ es una solución de (2.17), resulta que $u'(t) - a(t)u(t) = 0$ para todo $t \in I$. Luego, hemos demostrado que

$$\left(u(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\right)' = 0 \,\text{para todo}\, t \in I.$$

De otro lado, es inmediato comprobar que toda función de la forma dada en (2.18) es solución de la ecuación (2.17).

□

Con este resultado, estamos ya en condiciones de resolver la ecuación (2.16), asunto que abordamos en el siguiente teorema:

Teorema 2 *Sea $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$. Bajo las hipótesis de $a(t)$ y $b(t)$ continuas en I se tiene que existe una única solución del problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dicha solución viene dada por la expresión

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s\right)} \tag{2.20}$$

Demostración. En primer lugar, vamos a demostrar la existencia de al menos una solución del problema (2.19). Para ello, utilizaremos el *método de variación de las constantes* que consiste en considerar la solución general de la ecuación homogénea, que viene dada en (2.18), y buscar $K = K(t)$ para que dicha función sea solución de (2.19). Sea pues

$$x(t) = K(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación diferencial (2.16), se tiene que cumplir que $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, se tiene que cumplir que

$$K'(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + K(t)a(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = a(t)K(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + b(t),$$

es decir

$$K'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Ahora, como $b(t)$ es continua en I, integrando, resulta que

$$K(t) = C + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s.$$

Luego, hemos encontrado para la función $x(t)$ la expresión

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\left(C + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s\right),$$

con $C \in \mathbb{R}$ una constante sin determinar. Imponiendo ahora la condición $x(t_0) = x_0$, obtenemos que $C = x_0$; luego hemos encontrado para $x(t)$ una expresión que coincide con la dada en (2.20). Faltaría comprobar que efectivamente $x(t)$ así definida es efectivamente una solución del problema de condiciones iniciales (2.19), pero esto se reduce a una mera comprobación, aplicando nuevamente el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Hemos probado que existe una solución del problema (2.19), veamos que es única. Para ello, supongamos que $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de (2.19) y vamos a demostrar que son la misma función. Para ello, primero, como $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de (2.19), resulta que

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) = x_0 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{l} v'(t) = a(t)v(t) + b(t) \\ v(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

De dichas condiciones, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} \Big(u'(t) - v'(t)\Big) = a(t)\Big(u(t) - v(t)\Big) \\ u(t_0) - v(t_0) = 0. \end{array}\right.$$

Observemos primeramente que la función $u(t) - v(t)$ es una solución de la ecuación (2.17). Luego, según el Teorema 1, por la fórmula (2.18) tenemos que

$$u(t) - v(t) = K\mathrm{e}^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

para algún $K \in \mathbb{R}$. Pero como $u(t_0) - v(t_0) = 0$, resulta que $K = 0$, por lo tanto $u(t) = v(t)$.

$\square$

Ejemplo: *Resolver el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{t}x + t^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Solución. Aplicando la fórmula (2.20), obtenemos

$$x(t) = \mathrm{e}^{\displaystyle\int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s}} \left(1 + \int_1^t s^2 \mathrm{e}^{-\displaystyle\int_1^s \frac{\mathrm{d}u}{u}}\,\mathrm{d}s\right) = \frac{t^3 + t}{2}.$$

Queda como ejercicio comprobar que efectivamente es solución.

Una cuestión que no se ha resuelto es el calcular la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden (2.16), aunque si se ha resuelto para las homogéneas (Teorema 1, expresión (2.18)). Esta cuestión se deduce del Teorema 1 y del hecho de que la diferencia de dos soluciones de la ecuación (2.16) es una solución de la (2.17), como se hace en la demostración del Teorema 2. El resultado para la solución general, cuya demostración queda como ejercicio, es el siguiente:

Teorema 3 *Sea $t_0 \in I$. Bajo las hipótesis de $a(t)$ y $b(t)$ continuas en I se tiene que la solución general de la ecuación* (2.16) *es de la forma*

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} \left(C + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\displaystyle\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}s\right)} \tag{2.21}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

$\square$

2.3.1. Ecuación Diferencial de Bernoulli

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\boxed{x'(t) = f(t)x + g(t)x^n, \quad n \in \mathbb{R},\, n \neq 0, 1} \tag{2.22}$$

reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales de Bernoulli.*

Dichas ecuaciones se resuelven reduciéndolas a ecuaciones lineales. Para ello, primero dividimos por x^n, resultando

$$x^{-n}x' = f(t)x^{-n+1} + g(t).$$

Ahora, haciendo el cambio $u = x^{-n+1}$, como $u' = (-n+1)x^{-n}x'$, obtenemos

$$\frac{u'}{1-n} = f(t)u + g(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad u' = (1-n)f(t)u + (1-n)g(t)$$

que es efectivamente una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo: *Resolver el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} x' + \dfrac{x}{t} = x^2 \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Solución. Es una ecuación de Bernoulli para $n = 2$. Así, dividiendo por x^2, resulta

$$x^{-2}x' + \frac{1}{xt} = 1.$$

Ahora tomando $u = x^{-1}$, como $u' = -x^{-2}x'$, deducimos que

$$-u' + \frac{u}{t} = 1,$$

y como de la condición inicial $x(1) = 1$ resulta que $u(1) = 1$, el problema de condiciones iniciales que resulta es

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{t}u - 1 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 2, expresión (2.19), obtenemos como solución de dicho problema de condiciones iniciales:

$$u = t\Big(1 - \ln(t)\Big),$$

luego, la solución del problema es

$$1 = xt\Big(1 - \ln(t)\Big).$$

Capítulo 3

Sistemas Lineales. Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

3.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales consisten esencialmente en varias ecuaciones diferenciales. Así, un *sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden* es de la forma

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}} \tag{3.1}$$

Nótese que el número de ecuaciones es igual al número de variables, sin contar t.

Muchos procesos físicos responden a sistemas de ecuaciones diferenciales. Para ilustrar este hecho, vamos a considerar un problema real, cuya solución pasa por un sistema de ecuaciones diferenciales.
Ejemplo: *Consideramos un sistema compuesto por dos depósitos, cada uno de ellos de* 100 *litros de capacidad. Supongamos que ambos depósitos están llenos de una solución salina (agua con sal) de* $0'1$ *y* $0'3$ *kilogramos por litro de concentración respectivamente.*

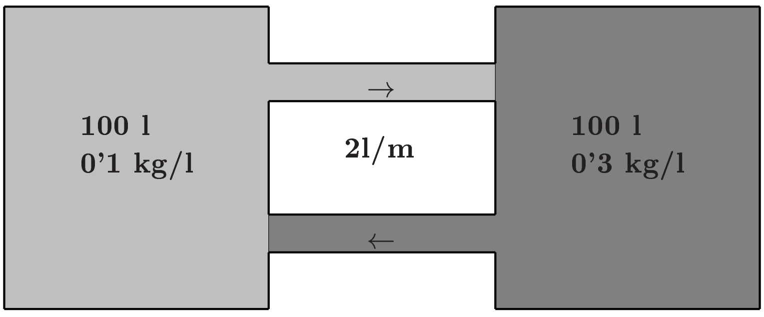

Figura 3.1

A partir de un determinado instante (ver figura 3.1) *fluye líquido de un depósito al otro a razón de* 2 *litros por minuto. Determinar la cantidad de sal presente en cada depósito a los t minutos de comenzar el proceso.*

Denotemos por $x(t)$ e $y(t)$ a la cantidad de sal presente en cada uno de los depósitos a los t minutos de comenzar el proceso. Notemos que $x(0) = 10$ kg e $y(0) = 30$ kg. Nuestro objetivo es tratar de precisar, tanto como nos sea posible, las funciones $x(t)$, $y(t)$. Para simplificar el problema, vamos a suponer que la velocidad de entrada, y por lo tanto la de salida, del líquido en cada uno de los depósitos es constante (igual a 2 l/m); igualmente supondremos también que la mezcla de líquidos en cada depósito se hace homogénea al instante.

Ahora, vamos a considerar $h > 0$ y el intervalo de tiempo $[t, t+h]$. Si denotamos por Δx a la *variación de la cantidad de sal presente en el primer depósito en el intervalo de tiempo* $[t, t+h]$, y Δy para el segundo depósito, tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = x(t+h) - x(t) = \text{sal que entra - sal que sale} \\ \Delta y = y(t+h) - y(t) = \text{sal que entra - sal que sale.} \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Para determinar la cantidad de sal que entra en el primer depósito en el intervalo $[t, t+h]$, tenemos la dificultad de que la concentración del líquido que entra no es constante (es la concentración del segundo depósito), concretamente es $y(t)/100$ kg/l. Razonando igual que en el ejemplo de la Sección 1.1, para "salvar" este problema vamos a considerar el hecho siguiente: supongamos que h es "muy pequeño". Entonces, en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ la concentración de sal en el segundo depósito no varía prácticamente, siendo aproximadamente igual a $y(t)/100$ kg/l. Así, de forma aproximada, podemos determinar la cantidad de sal que entra en el primer depósito en el intervalo $[t, t+h]$ (que es la cantidad de sal que sale del segundo depósito), siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sal que entra } 1^{\text{o}} \simeq \dfrac{y(t)}{100}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{l}}\,2\,\dfrac{\text{l}}{\text{m}}\,h\,\text{m} = \dfrac{y(t)}{50}h\,\text{kg} \\ \text{sal que sale } 2^{\text{o}} \simeq \dfrac{y(t)}{50}h\,\text{kg.} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Para determinar la cantidad de sal que sale del primer depósito en dicho intervalo (o la que entra en el segundo depósito), razonamos de forma similar. La única diferencia es la "concentración aproximada" que en este caso (es la del primer depósito) es $y(t)/100$ kg/l. Así obtenemos que en el intervalo $[t, t+h]$ la cantidad de sal que sale del primer depósito (o que entra en el segundo), es "aproximadamente"

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sal que sale } 1^{\text{o}} \simeq \dfrac{x(t)}{100}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{l}}\,2\,\dfrac{\text{l}}{\text{m}}\,h\,\text{m} = \dfrac{x(t)}{50}h\,\text{kg} \\ \text{sal que entra } 2^{\text{o}} \simeq \dfrac{x(t)}{50}h\,\text{kg.} \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Vamos a imponer las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sal que entra } 1^{\text{o}} = \dfrac{y(t)}{50}h\,\text{kg} & \text{sal que sale } 1^{\text{o}} = \dfrac{x(t)}{50}h\,\text{kg} \\ \text{sal que entra } 2^{\text{o}} = \dfrac{x(t)}{50}h\,\text{kg} & \text{sal que sale } 2^{\text{o}} = \dfrac{y(t)}{50}h\,\text{kg,} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

que es el modelo matemático considerado para este problema. Es decir, en las expresiones (3.3) y (3.4) consideramos igualdades. Con estas precisiones, sustituyendo las igualdades (3.5) en (3.2) obtenemos

$$\begin{cases} \Delta x = x(t+h) - x(t) = -\dfrac{x(t)}{50}h + \dfrac{y(t)}{50}h\,\mathrm{kg} \\ \Delta y = y(t+h) - y(t) = \dfrac{x(t)}{50}h - \dfrac{y(t)}{50}h. \end{cases} \tag{3.6}$$

Dividiendo ahora por h en ambos términos, y tomando el límite cuando $h \to 0$, resulta

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{x(t)}{50} + \dfrac{y(t)}{50} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t)}{50} - \dfrac{y(t)}{50}, \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x(t)}{50} + \dfrac{y(t)}{50} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x(t)}{50} - \dfrac{y(t)}{50}, \end{cases} \tag{3.7}$$

que es el sistema asociado al problema físico planteado.

3.2. Sistemas Homogéneos

Los sistemas de ecuaciones diferenciales que vamos a estudiar en este curso son aquellos de la forma (3.1), pero suponiendo que todas las funciones $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es decir, vamos a tratar los sistemas de la forma

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots & & \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t), \end{cases}} \tag{3.8}$$

dónde para $1 \leq i, j \leq n$, a_{ij} son constantes (o números reales). Estos sistemas se llaman *sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.* Hemos de observar que los coeficientes referidos son los a_{ij}. En toda la sección, vamos a suponer que las funciones $b_i(t), 1 \leq i \leq n$ que aparecen en (3.8) son continuas en un intervalo de la recta.

Para resolver estos sistemas, vamos a utilizar una técnica parecida a la usada en la Sección 1.4. Para ello, vamos a considerar en primer lugar un sistema similar al (3.8), pero suponiendo que las funciones $b_i(t)$ son idénticamente 0. Así, obtenemos el sistema

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}} \tag{3.9}$$

llamado *sistema homogéneo.* El sistema (3.8) se llama *completo* y (3.9) su reducido. Luego, el método a seguir es el de resolver el sistema reducido (u homogéneo) y posteriormente (utilizando el método de variación de las constantes) resolver el completo.

Para simplificar, usualmente los sistemas se pueden escribir utilizando una notación matricial. Así, si denotamos por :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

los sistemas (3.8) y (3.9) quedan de la forma

$$\boxed{X'(t) = AX(t) + B(t)} \tag{3.10}$$

$$\boxed{X'(t) = AX(t)} \tag{3.11}$$

respectivamente.

La resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales es simple, aunque muy laboriosa. Por esto, nos limitaremos a citar (sin demostraciones) la solución de este tipo de problemas. Comencemos con el homogéneo.

Supongamos que el polinomio $\det(\lambda I_n - A)$ tiene como raíces:

- **reales:** r_p, con multiplicidad s_p, $p = 1, 2, \dots, k$
- **complejas:** $\alpha_j \pm \mathrm{i}\beta_j$, con multiplicidad v_j, $j = 1, 2, \dots, m$.

Entonces, todas las soluciones del sistema homogéneo (3.9), o (3.11), son de la forma

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=0}^{s_p - 1} c_{p,q}^i t^q \mathrm{e}^{r_p t} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{u=0}^{v_j - 1} \left(d_{j,u}^i \cos(\beta t) + g_{j,u}^i \mathrm{sen}(\beta t) \right) t^q \mathrm{e}^{\alpha_j t} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

<u>**Ejemplo:**</u> Supongamos que las raíces del polinomio $\det(\lambda I_n - A)$ son

raíz	multiplicidad
0	2
-1	1
2	3
$\pm\mathrm{i}$	2
$4 \pm \mathrm{i}3$	1

es decir $n = 12$. Luego, para $i = 1, 2, \dots, 12$ se tiene que

$$\begin{aligned} x_i(t) &= (a^i + b^i t) + (c^i)\mathrm{e}^{-t} + (d^i + e^i t + f^i t^2)\mathrm{e}^{2t} \\ &+ \left(\left(g^i \cos(t) + h^i \mathrm{sen}(t) \right) + \left(k^i \cos(t) + l^i \mathrm{sen}(t) \right) t \right) + \left(m^i \cos(3t) + p^i \mathrm{sen}(3t) \right) \mathrm{e}^{4t}. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos que nos ilustren este resultado.

Ejemplo: *Resolver el sistema* (3.7) *, y calcular la solución particular que cumple las condiciones iniciales:* $x(0) = 10$, $y(0) = 30$.

Solución. El sistema en cuestión es

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x(t)}{50} + \dfrac{y(t)}{50} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x(t)}{50} - \dfrac{y(t)}{50}. \end{array} \right.$$

Denotando por

$$A = \begin{pmatrix} -1/50 & 1/50 \\ 1/50 & -1/50 \end{pmatrix}$$

resulta que el polinomio $\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - \lambda/25$ tiene dos raíces reales simples que son $r_1 = 0$ y $r_2 = -1/25$. Así entonces, todas las soluciones del sistema anterior son de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B\mathrm{e}^{-t/25} \\ C + D\mathrm{e}^{-t/25} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en el sistema, obtendremos las relaciones entre las constantes, es concreto, en este caso tendremos 2 parámetros (puesto que es un sistema 2×2). Así entonces, como ha de cumplirse que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/50 & 1/50 \\ 1/50 & -1/50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-B\mathrm{e}^{-t/25}}{25} \\ \dfrac{-D\mathrm{e}^{-t/25}}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/50 & 1/50 \\ 1/50 & -1/50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + B\mathrm{e}^{-t/25} \\ C + D\mathrm{e}^{-t/25} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-B}{25}\mathrm{e}^{-t/25} = -\dfrac{A-C}{50} - \dfrac{B-D}{50}\mathrm{e}^{-t/25} \\ \dfrac{-D}{25} = \dfrac{A-C}{50} + \dfrac{B-D}{50}\mathrm{e}^{-t/25} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -A + C \\ 2B = B - D \\ 0 = A - C \\ -2D = B - D \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = A \\ D = -B \end{array} \right.$$

por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B\mathrm{e}^{-t/25} \\ A - B\mathrm{e}^{-t/25} \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos la solución particular, que es única, que cumple $x(0) = 10$, $y(0) = 30$. Es decir, se ha de cumplir

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B \\ A - B \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 20 \\ B = -10 \end{array} \right. .$$

Luego, la solución del problema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 10\mathrm{e}^{-t/25} \\ 20 + 10\mathrm{e}^{-t/25} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: *Resolver el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 4y, \end{array} \right.$$

y calcular la solución particular que cumple $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Solución. Como el polinomio

$$\det(\lambda I_2 - A) = \left| \begin{array}{cc} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{array} \right| = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

tiene una raíz doble $r = 3$, las soluciones del sistema son de la forma

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (A + Bt)\mathrm{e}^{3t} \\ (C + Dt)\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right).$$

Ahora, sustituyendo en el sistema, obtendremos las relaciones entre las constantes. Así, obtenemos

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right),$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} (3A + B)\mathrm{e}^{3t} + (3B)t\mathrm{e}^{3t} = (2A - C)\mathrm{e}^{3t} + (2B - D)t\mathrm{e}^{3t} \\ (3C + D)\mathrm{e}^{3t} + (3D)t\mathrm{e}^{3t} = (A + 4C)\mathrm{e}^{3t} + (B + 4D)t\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 3A + B = 2A - C \\ 3B = 2B - D \\ 3C + D = A + 4C \\ 3D = B + 4D \end{array} \right. .$$

Resolviendo el último sistema resulta $C = -(A+B)$ y $D = -B$. Luego, la solución general del sistema es

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (A + Bt)\mathrm{e}^{3t} \\ (-A - B - Bt)\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right).$$

Imponiendo ahora las condiciones $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$, obtenemos que $A = 1$ y $B = -3$. Por lo tanto, la solución particular buscada es

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (1 - 3t)\mathrm{e}^{3t} \\ (2 + 3t)\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right).$$

Ejemplo: *Resolver el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -7x + y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x - 5y. \end{array} \right.$$

Solución. Como el polinomio

$$\det(\lambda I_2 - A) = \left| \begin{array}{cc} \lambda + 7 & -1 \\ 2 & \lambda + 5 \end{array} \right| = \lambda^2 + 12\lambda + 37$$

tiene dos raíces complejas simples $-6 \pm \mathrm{i}$, las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Big(A\cos(t) + B\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} \\ \Big(C\cos(t) + D\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, sustituyendo en el sistema, obtendremos las relaciones entre las constantes. Así, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{cases} \Big((-6A+B)\cos(t) + (-A-6B)\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} = \Big((-7A+C)\cos(t) + (-7B+D)\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} \\ \Big((-6C+D)\cos(t) + (-C-6D)\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} = \Big((-2A-5C)\cos(t) + (-2B-5D)\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t}. \end{cases}$$

Identificando los coeficientes, resulta

$$\Rightarrow \begin{cases} -6A + B = -7A + C \\ -A - 6B = -7B + D \\ -6C + D = -2A - 5C \\ -C - 6D = 2B - 5D \end{cases}.$$

Resolviendo el último sistema resulta $C = (A+B)$ y $D = B - A$. Luego, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Big(A\cos(t) + B\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} \\ \Big((A+B)\cos(t) + (B-A)\mathrm{sen}(t)\Big)\mathrm{e}^{-6t} \end{pmatrix}.$$

Para concluir los sistemas, falta estudiar los completos (o no homogéneos). Dichos sistemas se tratarán en la siguiente sección, mediante la resolución de algunos problemas, sin abordar el caso general.

3.3. Sistemas no Homogéneos

El estudio de los sistemas no homogéneos o completos (3.8), como ya hemos indicado antes, se reducirá al tratamiento mediante un ejercicio. La técnica de resolución es idéntica para todos los ejemplos.

Ejemplo: *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x + y - 36t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x + y - 2\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$$

y calcular la solución particular que cumple $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Solución. En primer lugar, vamos a obtener la solución general del sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4x+y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x+y. \end{array}\right.$$

Como el polinomio

$$\det(\lambda I_2-A)=\left|\begin{array}{cc} \lambda-4 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{array}\right|=\lambda^2-5\lambda+6$$

tiene dos raíces reales simples $r_1=3$ y $r_2=2$, las soluciones del sistema son de la forma

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} A\mathrm{e}^{3t}+B\mathrm{e}^{2t} \\ C\mathrm{e}^{3t}+D\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right).$$

Ahora, sustituyendo en el sistema, obtendremos las relaciones entre las constantes. Así, obtenemos

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right),$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{l} 3A\mathrm{e}^{3t}+2B\mathrm{e}^{2t}=(4A+C)\mathrm{e}^{3t}+(4B+D)\mathrm{e}^{2t} \\ 3C\mathrm{e}^{3t}+2D\mathrm{e}^{2t}=(-2A+C)\mathrm{e}^{3t}+(-2B+D)\mathrm{e}^{3t} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3A=4A+C \\ 2B=4B+D \\ 3C=-2A+C \\ 2D=-2B+D \end{array}\right.$$

Resolviendo el último sistema resulta $C=-A$ y $D=-2B$. Luego, la solución general del sistema homogéneo es

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} A\mathrm{e}^{3t}+B\mathrm{e}^{2t} \\ -A\mathrm{e}^{3t}-2B\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right).$$

Para obtener la solución general del sistema completo, vamos a utilizar el método de variación de las constantes, que consiste en considerar las constantes de la solución general del sistema homogéneo como variables. Así, suponiendo que $A=A(t)$ y $B=B(t)$, vamos a buscar $A(t)$ y $B(t)$ de manera que

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} A(t)\mathrm{e}^{3t}+B(t)\mathrm{e}^{2t} \\ -A(t)\mathrm{e}^{3t}-2B(t)\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right)$$

sea la solución general del sistema completo. Por lo tanto, ha de cumplirse que

$$\left(\begin{array}{c} A(t)\mathrm{e}^{3t}+B(t)\mathrm{e}^{2t} \\ -A(t)\mathrm{e}^{3t}-2B(t)\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right)'=\left(\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} A(t)\mathrm{e}^{3t}+B(t)\mathrm{e}^{2t} \\ -A(t)\mathrm{e}^{3t}-2B(t)\mathrm{e}^{2t} \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} -36t \\ -2\mathrm{e}^{t} \end{array}\right).$$

Operando, resulta que

$$\left\{\begin{array}{l} A'(t)\mathrm{e}^{3t}+B'(t)\mathrm{e}^{2t}=-36t \\ -A'(t)\mathrm{e}^{3t}-2B'(t)\mathrm{e}^{2t}=-2\mathrm{e}^{t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A'(t)=-72t\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-2t} \\ B'(t)=36t\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. .$$

Integrando en las dos últimas ecuaciones, obtenemos que

$$\left\{\begin{array}{l} A(t)=(24t+8)\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-2t}+K \\ B(t)=-(18t+9)\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+L \end{array}\right.$$

siendo K y L constantes reales. Luego, la solución general del sistema completo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(24t+8)\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} + K]\mathrm{e}^{3t} + [-(18t+9)\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t} + L]\mathrm{e}^{2t} \\ -[(24t+8)\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} + K]\mathrm{e}^{3t} - 2[-(18t+9)\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t} + L]\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 6t - \mathrm{e}^{t} + K\mathrm{e}^{3t} + L\mathrm{e}^{2t} \\ 10 + 12t + 3\mathrm{e}^{t} - K\mathrm{e}^{3t} - 2L\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución particular que cumple $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$, sustituyendo en la expresión anterior $t = 0$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, resulta que $K = -8$ y $L = 10$. Con estos valores, queda finalmente

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 6t - \mathrm{e}^{t} - 8\mathrm{e}^{3t} + 10\mathrm{e}^{2t} \\ 10 + 12t + 3\mathrm{e}^{t} + 8\mathrm{e}^{3t} - 20\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

que es la solución particular buscada.

3.4. Ecuaciones Lineales con Coeficientes Constantes

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = b(t),} \tag{3.12}$$

con a_i constantes reales $i = 1, 2, \ldots n$, se llaman *ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes*. Cuando la función $b(t)$ es idénticamente 0, la ecuación resultante

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0,} \tag{3.13}$$

se llama *homogénea*. Así mismo, la ecuación (3.12) se llama *completa* y (3.13) su *reducida*.

Una manera de resolver este tipo de ecuaciones consiste en convertirlas en sistemas, problema que ya sabemos tratar. Para ello, introduciendo las variables:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad x_3 = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ldots, x_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}},$$

la ecuación (3.12) se convierte en el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & = x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & = x_3 \\ \vdots & \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t} & = x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} & = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + b(t). \end{array} \right.$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo: *Resolver la ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 4x = t^2 + 1,$$

y determinar la solución que cumple $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Solución. En primer lugar, vamos a considerar el sistema asociado a la ecuación diferencial anterior. Para ello, haciendo $y = x'$, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x - 3y + t^2 + 1. \end{array} \right.$$

Ahora, vamos a resolver el sistema homogéneo asociado

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x - 3. \end{array} \right.$$

Como el polinomio

$$\det(\lambda I_2 - A) = \left| \begin{array}{cc} \lambda & -1 \\ -4 & \lambda + 3 \end{array} \right| = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

tiene dos raíces reales simples $r_1 = 1$ y $r_2 = -4$, las soluciones del sistema homogéneo son de la forma

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-4t} \\ C\mathrm{e}^t + D\mathrm{e}^{-4t} \end{array} \right).$$

Ahora, sustituyendo en el sistema, obtendremos las relaciones entre las constantes. Así, obtenemos

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right),$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathrm{e}^t - 4B\mathrm{e}^{-4t} = C\mathrm{e}^t + D\mathrm{e}^{-4t} \\ C\mathrm{e}^t - 4D\mathrm{e}^{-4t} = (4A - 3C)\mathrm{e}^t + (+4B - 3D)\mathrm{e}^{-4t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = C \\ -4B = D \\ C = 4A - 3C \\ -4D = 4B - 3D \end{array} \right. .$$

Resolviendo el último sistema resulta $C = A$ y $D = -4B$. Luego, la solución general del sistema homogéneo es

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-4t} \\ A\mathrm{e}^t - 4B\mathrm{e}^{-4t} \end{array} \right).$$

Observemos que la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 4x = 0,$$

que es la función $x(t)$, es la familia de curvas dependiente de 2 parámetros

$$x(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-4t}.$$

Para obtener la solución general del sistema completo, utilizamos el método de variación de las constantes. Así, suponiendo que $A = A(t)$ y $B = B(t)$, vamos a buscar $A(t)$ y $B(t)$ de manera que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)\mathrm{e}^{t} + B(t)\mathrm{e}^{-4t} \\ A(t)\mathrm{e}^{t} - 4B(t)\mathrm{e}^{-4t} \end{pmatrix}.$$

sea la solución general del sistema completo. Por lo tanto, ha de cumplirse que

$$\begin{pmatrix} A(t)\mathrm{e}^{t} + B(t)\mathrm{e}^{-4t} \\ A(t)\mathrm{e}^{t} - 4B(t)\mathrm{e}^{-4t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t)\mathrm{e}^{t} + B(t)\mathrm{e}^{-4t} \\ A(t)\mathrm{e}^{t} - 4B(t)\mathrm{e}^{-4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{pmatrix}.$$

Operando, resulta que

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(t)\mathrm{e}^{t} + B'(t)\mathrm{e}^{-4t} = 0 \\ A'(t)\mathrm{e}^{t} - 4B'(t)\mathrm{e}^{-4t} = t^2+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'(t) = \dfrac{t^2+1}{5}\mathrm{e}^{-t} \\ B'(t) = -\dfrac{t^2+1}{5}\mathrm{e}^{4t} \end{array} \right. .$$

Integrando en las dos últimas ecuaciones, obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = -\dfrac{t^2+2t+3}{5}\mathrm{e}^{-t} + K \\ B(t) = -\dfrac{8t^2-4t+9}{160}\mathrm{e}^{4t} + L \end{array} \right.$$

siendo K y L constantes reales. Luego, simplificando, la solución general del sistema completo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{8t^2+12t+21}{32} + K\mathrm{e}^{t} + L\mathrm{e}^{-4t} \\ -\dfrac{4t+3}{8} + K\mathrm{e}^{t} - 4L\mathrm{e}^{-4t} \end{pmatrix},$$

Luego, la solución general $x(t)$ de la ecuación diferencial completa

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 4x = t^2+1,$$

es

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{3t}{8} - \frac{21}{32} + K\mathrm{e}^{t} + L\mathrm{e}^{-4t}.$$

Finalmente, imponiendo $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$ (ó $x(0) = 0$, $y(0) = 1$), obtenemos $K = 4/5$ y $L = -23/160$, resultando la solución particular:

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{3t}{8} - \frac{21}{32} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^{t} - \frac{23}{160}\mathrm{e}^{-4t}.$$

Capítulo 4

Ejercicios

1) Comprobar si son soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes, las funciones que se dan:

a) $tx'(t) = 2x(t), \quad x(t) = 5t^2,$
b) $x''(t) = x^2(t) + t^2, \quad x(t) = 1/t,$
c) $(x+t)\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x = 0, \quad x(t) = (C^2 - x^2)(2x)^{-1},$
d) $x''(t) + x(t) = 0, \quad x(t) = 3\,\mathrm{sen}(t) - 4\cos(t),$
e) $x''(t) - (\lambda_1 - \lambda_2)x'(t) - \lambda_1\lambda_2 x(t) = 0, \quad x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$

2) Determinar la ecuación diferencial asociada a cada una de las siguientes familias de curvas:

a) $x(t) = \mathrm{e}^{t+A},$
b) $x(t) = A\mathrm{e}^t + B,$
c) $x(t) = A\cos(t) + B\,\mathrm{sen}(t).$

3) Para las siguientes familias de curvas, hallar las funciones que cumplen las condiciones iniciales:

a) $t^2 - x^2(t) = C, \quad x(0) = 5,$
b) $x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{2t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$
c) $x(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{2t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2.$

4) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\tan(t)\,\mathrm{sen}^2(x)\mathrm{d}t + \cot(x)\cos^2(t)\mathrm{d}x = 0,$
b) $x^2\mathrm{d}t - t^2\mathrm{d}x = 0,$
c) $x\sqrt{x^2+t^2}\mathrm{d}t - t(t + \sqrt{x^2+t^2})\mathrm{d}x = 0,$
d) $(t-x)x\mathrm{d}t - t^2\mathrm{d}x = 0,$
e) $(2t - x + 4)\mathrm{d}x + (t - 2x + 5)\mathrm{d}t = 0,$
f) $(1 + x + t)\mathrm{d}x = (1 - 3x - 3t)\mathrm{d}t.$

5) Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

a) $(t^2 + x^2)\mathrm{d}t + tx\mathrm{d}x = 0, \qquad x(1) = -1,$
b) $(tx^2 + t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x, \qquad x(0) = 0,$
c) $(t + 2x)\mathrm{d}t + (2t + 3x)\mathrm{d}x = 0, \qquad x(1) = 0.$

6) Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales, asociados a ecuaciones diferenciales lineales o de Bernoulli:

a) $t\mathrm{d}x - x\mathrm{d}t = t\mathrm{d}t, \qquad x(1) = 2,$
b) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = t + \mathrm{e}^{-2t}, \qquad x(0) = 0,$
c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{x}{t} = 3\cos(2t), \qquad x(\pi/2) = 0,$
d) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx + tx^4 = 0, \qquad x(0) = 1,$
e) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = x^2\big(\cos(t) - \mathrm{sen}(t)\big), \qquad x(0) = 1.$

7) Resolver los siguientes sistemas, dando la solución general y particular en cada caso

a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

e) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8) Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales, dando previamente la solución general:

a) $x''(t) + 4x(t) = \cos(2t) + \cos(4t), \qquad x(0) = x'(0) = 1,$
b) $x'''(t) - 4x'(t) = t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0, \qquad x''(0) = -1/4.$

9-a) Consideramos el sistema (ver figura 9.1), compuesto de un depósito de 100 litros de capacidad, lleno de una solución salina de 1 kg/l de concentración; y de un segundo depósito, de 80 l. de capacidad, está lleno de una solución salina de 4 kg/l de concentración. A partir de un determinado instante, fluye al primer depósito una solución salina de 2 kg/l de concentración a razón de 3 l/m. Igualmente, del primer depósito fluye líquido al segundo a razón de 2 l/m. Determinar la cantidad de sal presente en cada depósito a los t minutos de comenzar el proceso. Comentar qué ocurre cuando $t \to \infty$.

9-b) Consideramos el sistema (ver figura 9.2), compuesto de un depósito de 100 litros de capacidad, lleno hasta la mitad, 50 l., de una solución salina de 3 kg/l de concentración; y de un segundo depósito, de 70 l. de capacidad, vacío. A partir de un determinado instante, fluye al primer depósito una solución salina de 1 kg/l de concentración a razón de 4 l/m. Igualmente, del primer depósito fluye líquido al segundo a razón de 2 l/m. Determinar la cantidad de sal presente en cada depósito a los t minutos de comenzar el proceso. Comentar qué ocurre cuando $t \to \infty$.

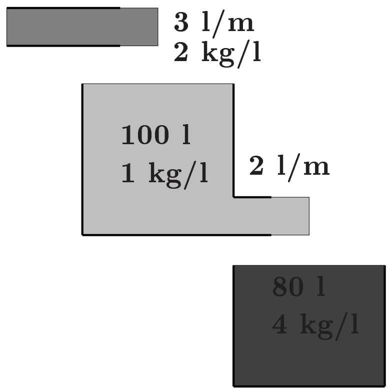

Figura 9.1

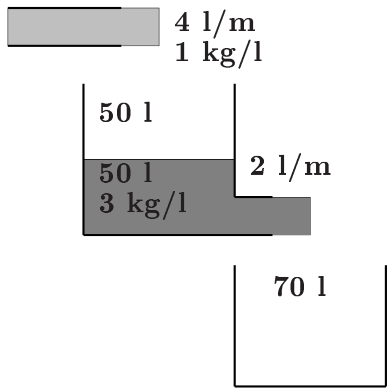

Figura 9.2

10) Consideramos el siguiente sistema compuesto por 4 depósitos: El primero (depósito A), de 1000 litros de capacidad, lleno de una solución salina de $0'3$ kilogramos/litro de concentración. Los otros 3 depósitos (B,C,D), tienen una capacidad de 100 litros cada uno. El B está lleno hasta su mitad (50 litros) de una solución salina de $0'1$ kilogramos/litro de concentración, el C está vacío; y el depósito D está lleno de una solución salina de $0'4$ kilogramos/litro de concentración. A partir de un determinado instante, (ver Figura 10)

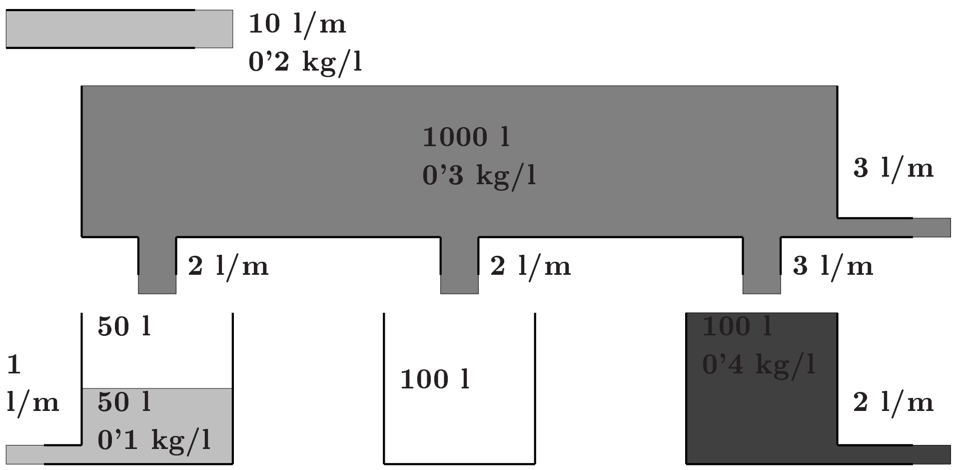

Figura 10

fluye al depósito A agua con sal de $0'2$ kg/l de concentración, a razón de 10 litros/minuto. Al mismo tiempo, fluye al depósito B líquido del depósito A a razón de 2 l/m, saliendo líquido de este depósito (B) a razón de 1 l/m. Del depósito A fluye al C líquido a razón de 2 l/m. Finalmente, del A al D fluye líquido a 3 l/m, saliendo líquido del depósito D, por un sumidero, a razón de 2 l/m. Determinar la cantidad de sal presente en cada depósito a los t minutos de comenzar el proceso. Comentar lo que ocurre cuando $t \to \infty$.

11) Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

a) $(t+1)\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}x + x\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t = \mathrm{d}t, \qquad x(0) = 0,$
b) $(\sqrt{t^2+1} - x)\mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{d}x, \qquad x(0) = 0,$
c) $\mathrm{d}x = \cos(x)\mathrm{d}t, \qquad x(0) = 0.$

SOLUCIONES

1) a) si, b) no, c) si, d) si.

2) a) $x'(t) = x(t)$, b) $x''(t) = x'(t)$, c) $x''(t) + x(t) = 0$.

3) a) $C = -25$ b) $A = 0$, $B = 1$ c) $A = -1/6$, $B = -1/2$, $C = 2/3$.

4)

a) $\cot^2(x) = \tan^2(t) + C$,
b) $x = t + Ctx$,
c) $Ct - \sqrt{x^2 + t^2} = t \ln\left(\sqrt{x^2 + t^2} - t\right)$,
d) $t = Ce^{t/x}$,
e) $(x + t - 1)^3 = C(t - x + 3)$,
f) $3t + x + 2\ln(x + t - 1) = C$.

5)

a) $t^4 + 2(tx)^2 = 3$,
b) $x = \tan(t^2/2)$,
c) $t^2 + 4tx + 3x^2 = 1$.

6)

a) $x = t(2 + \ln(t))$,
b) $x = \dfrac{3t - 1 - 8e^{-3t}}{9} + e^{-2t}$,
c) $x = \dfrac{3 + 3\cos(2t)}{4t} + \dfrac{3\,\mathrm{sen}(2t)}{2}$,
d) $\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{3e^{3t^2} - 1}{2}$,
e) $x^{-1} = e^t - \mathrm{sen}(t)$.

7)

$$\text{a)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t + Be^{-t} \\ Ae^t + 3Be^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A = 1 \\ B = 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t))e^t \\ ((A - B)\cos(2t) + (A + B)\,\mathrm{sen}(2t))e^t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A = 1 \\ B = 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + 2Ft)e^{2t} \\ (D + (A - 2F)t + Ft^2)e^{2t} \\ ((A - D + 2F) + (4F - A)t - Ft^2)e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A = 1 \\ D = 0 \\ F = -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\ln(t) + Kt + 2t^{-1} - t^{-2}/2 + L - 2 \\ -4\ln(t) + 2Kt + 5t^{-1} - [K - 4(L - 2)]/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} K = 4 \\ L = -5/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ke^t + Le^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t} \\ -Ke^t + Le^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} K = 1 \\ L = 6/7 \end{pmatrix}.$$

8)

a) $x(t) = L\,\mathrm{sen}(2t) + \dfrac{3 + 6t\,\mathrm{sen}(2t) + \cos(4t) - 6\cos(2t)^2}{24} + K\cos(2t)$, $K = \dfrac{13}{12}$, $L = \dfrac{1}{2}$.
b) $x(t) = A + Be^{2t} + Ce^{-2t} - \dfrac{-t^2}{8}$, $A = 1$, $B = C = 0$.

9-a) Llamando $x(t)$, $y(t)$ a las cantidades de sal presentes en cada uno de los depósitos, las ecuaciones diferenciales y las soluciones respectivas son:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-3x}{100} + 6 \\ x(0) = 100 \\ \text{solución } \; x = 100(2 - \mathrm{e}^{-3t/100}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{-y}{40} + \dfrac{x}{50} = \dfrac{-y}{40} + 4 - 2\mathrm{e}^{-3t/100} \\ y(0) = 320 \\ \text{solución}\, y = -240\mathrm{e}^{-t/40} + 400\mathrm{e}^{-3t/100} + 160 \end{cases}$$

9-b) Llamando $x(t)$, $y(t)$ a las cantidades de sal presentes en cada uno de los depósitos, las ecuaciones diferenciales y las soluciones respectivas son:

para $t \in [0, 25]$
$$\begin{cases} x' = \dfrac{-2x}{50 + 2t} + 4 \\ x(0) = 150 \\ \text{solución } \; x = \dfrac{2(t^2 + 50t + 1875)}{t + 25} \end{cases}$$
para $t \in [25, \infty)$
$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{25} + 4 \\ x(25) = 150 \\ \text{solución}\, x = 100 + 50\mathrm{e}^{1-t/25} \end{cases}$$
para $t \in [0, 25]$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{50 + 2t} = \dfrac{2(t^2 + 50t + 1875)}{(t + 25)^2} \\ y(0) = 0 \\ \text{solución } \; y = 2t + 100 - \dfrac{2500}{t + 25} \end{cases}$$
para $t \in [25, 35]$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{100} = 2 + \mathrm{e}^{1-t/25} \\ y(25) = 100 \\ \text{solución } \; y = 75 + 2t - 25\mathrm{e}^{1-t/25} \end{cases}$$
para $t \in [35, \infty)$
$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2y}{70} + \dfrac{2x}{100} = \dfrac{-y}{35} + 2 + \mathrm{e}^{1-t/25} \\ y(35) = 145 - 25\mathrm{e}^{-2/5} \\ \text{solución } \; y = \left(75\mathrm{e}^{-t/35} - \dfrac{175\mathrm{e}^{-t/25}}{2}\right)\mathrm{e} + \dfrac{125\mathrm{e}^{3/5-t/35}}{2} + 70 \end{cases}$$

10) Llamando $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ a las cantidades de sal presentes en los depósitos A,B,C y D, respectivamente, las ecuciones diferenciales y las soluciones respectivas son:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{100} + 2 \\ x(0) = 300 \\ \text{solución } \ x = 100(2 + \mathrm{e}^{-t/100}) \end{cases}$$

para $t \in [0, 50]$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-y}{50+t} + \dfrac{x}{500} = \dfrac{-y}{50+t} + \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-t/100}}{5} \\ y(0) = 5 \\ \text{solución } \ y = \dfrac{16250 + 100t + t^2 - 100(t+150)\mathrm{e}^{-t/100}}{5(50+t)} \\ y(50) = \dfrac{95}{2} - 40\mathrm{e}^{-1/2} \end{cases}$$

para $t \in [50, \infty)$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-y}{50} + \dfrac{x}{500} = \dfrac{-y}{50} + \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-t/100}}{5} \\ y(50) = \dfrac{95}{2} - 40\mathrm{e}^{-1/2} \\ \text{solución } \ y = \dfrac{55\mathrm{e}^{1-t/50}}{2} - 60\mathrm{e}^{1/2-t/50} + 20\mathrm{e}^{-t/100} + 20 \end{cases}$$

para $t \in [0, 50]$

$$\begin{cases} z' = \dfrac{x}{500} = \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-t/100}}{5} \\ z(0) = 0 \\ \text{solución } \ z = \dfrac{2t}{5} + 20 - 20\mathrm{e}^{-t/100} \\ z(50) = 40 - 20\mathrm{e}^{-1/2} \end{cases}$$

para $t \in [50, \infty)$

$$\begin{cases} z' = \dfrac{-z}{50} + \dfrac{x}{500} = \dfrac{-z}{50} + \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-t/100}}{5} \\ z(50) = 40 - 20\mathrm{e}^{-1/2} \\ \text{solución } \ z = 20\mathrm{e}^{1-t/50} - 40\mathrm{e}^{1/2-t/50} + 20\mathrm{e}^{-t/100} + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{-3u}{100} + \dfrac{3x}{1000} = \dfrac{-3u}{100} + \dfrac{6 + 3\mathrm{e}^{-t/100}}{10} \\ u(0) = 40 \\ \text{solución } \ u = 15\mathrm{e}^{-t/100} + 5\mathrm{e}^{-3t/100} + 20 \end{cases}$$

11)

a) $x = \dfrac{\ln(t + \sqrt{t^2+1})}{t+1}$,

b) $x = \dfrac{1}{t+1}\Big(\dfrac{\ln(t + \sqrt{t^2+1})}{2} + \dfrac{t\sqrt{t^2+1})}{2}\Big)$,

c) $2x = \ln\Big(\dfrac{1 + \mathrm{sen}(x)}{1 - \mathrm{sen}(x)}\Big)$.

Capítulo 5

Bibliografía

Modelos Matemáticos en las Ciencias Experimentales, Mariano J. Valderrama Bonnet, Ed. Pirámide, Madrid (1995).

Teoría y problemas, salvo sistemas.

Cálculo Infinitesimal II (Tomo 2), Fernando García Castro, Andrés Gutiérrez Gómez, Ed. Pirámide, Madrid (1981).

Teoría y problemas, aunque de un nivel más avanzado.

Ecuaciones Diferenciales, Frank Ayres, JR., Ed. McGraw-Hill, Colombia (1969).

Una colección de problemas de ecuaciones diferenciales. Libro de la serie Schaum.

Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático(2ª edición), B. Demidovich, Ed. Paraninfo, Madrid (1972).

Libro de problemas de ecuaciones diferenciales (pg. 344 y siguientes), y de derivadas e integrales de funciones de una variable. Los problemas tienen un cierto nivel.

Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Murray R. Spiegel, Ed. McGraw-Hill, Colombia (1970).

En este manual, de la serie Schaum, se recogen las propiedades de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, así como unas tablas con muchos tipos de integrales resueltas.

Capítulo 6

Prácticas de Ordenador

Las pácticas de Matemáticas con ordenador consistirán en el manejo del programa **DERIVE**. Para entrar en dicho programa, desde un sistema operativo **MSDOS**, habría que teclear

CD DERIVE $\boxed{\hookleftarrow}$

DERIVE $\boxed{\hookleftarrow}$

En nuestro caso, al estar el programa ya cargado, las instrucciones anteriores no son necesarias.

Salir: tecleamos **Q**uit
apareciendo en la la pantalla el mensaje $\boxed{\text{Abandon Expresions (Y/N)?}}$
tecleamos **N**
puesto que vamos a seguir. Para finalizar teclearíamos **Y**.

Precisión: Podemos precisar el número de cifras decimales que queremos que aparezcan. El programa da, por defecto, directamente 6. Supongamos que queremos que aparezcan 8 cifras decimales, para ello tecleamos lo siguiente:
Options
Precision
Tab (el tabulador, tecla $\leftrightarrows$)
8
$\boxed{\hookleftarrow}$

Observación: siempre que nos confundamos, pulsaremos la tecla **Esc** las veces necesarias hasta llegar al principio, es decir, hasta que aparezca en la parte inferior de la pantalla **Author** iluminado.

Modo Gráfico: El programa **DERIVE** tiene varios modos de presentación de pantalla. Al iniciarlo, el modo es el de TEXTO. Otro modo es el GRÁFICO, que sirve por ejemplo para la representación de funciones. Otra utilidad del modo gráfico es la de reducir el tamaño de los caracteres, permitiendo ver más en una línes de la pantalla. Por lo tanto, cuando se van a utilizar expresiones largas, es conveniente pasar al modo gráfico. La forma es la siguiente: tecleamos
Options
Display
Graphics (apareciendo iluminado **H**ight)
$\boxed{\hookleftarrow}$

Expresiones Aritméticas
Supongamos que queremos realizar transformaciones con el número 3438^8. En primer lugar, hemos de introducirlo. Para ello tecleamos:
Author (apareciendo AUTHOR expresion:)
3438ˆ8
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo en pantalla)
$\boxed{1:\ 3438^8}$

Para realizar la operación anterior, tecleamos
Simplify (apareciendo SIMPLIFY expresion #1)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparece en pantalla)
$\boxed{2:\ 19518524260205634304443760896}$

Vamos a trabajar ahora con el número $\sqrt{8}$. Primero lo introducimos:
Author
sqrt(8) o bien 8ˆ(1/2)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparece en pantalla)
$\boxed{3:\ \sqrt{8}}$

Para simplificar la expresión anterior, tecleamos
Simplify (apareciendo SIMPLIFY expresion #3)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparece en pantalla)
$\boxed{4:\ 2\sqrt{2}}$

Si queremos realizar la operación, es decir, que aparezca un número, tecleamos:
appro**X** (apareciendo APPROX expresion #4)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparece en pantalla) $\boxed{5:\ 2{,}82842}$

dependiendo del número de cifras decimales introducida en la precisión.

Observación: los comandos **S**implify y appro**X** tienen una diferencia esencial. Simplify simplifica una expresión, pero sin realizar las operaciones que den lugar a decimales. En cambio approX realiza todas las operaciones dando como resultado un número, que obviamente será una "aproximación" al valor real de la expresión cuando esta no de lugar a un "resultado exacto" como en el caso de $\sqrt{8}$.

Vamos a borrar ahora todo lo que aparece en la pantalla. Es conveniente borrar todo lo que ya no se va a utilizar, para evitar confusiones cuando se va a trabajar con varias expresiones a la vez. Para borrar, tecleamos

Remove (apareciendo REMOVE: Start:5 End:5)

lo que nos indica la pantalla es que vamos a borrar de la expresión 5 a la 5. Para borrar todas con la tecla $\boxed{\uparrow}$ iluminamos la expresión 1. Observemos que va cambiando el número que acompaña a Start:. Ahora con **Tab** (tabulador) pasamos el cursor a End: (que en este caso está acompañado por el 5). Resumiendo, ahora lo que le decimos al ordenador es que nos borre de la expresión 1 a la 5. Tecleamos ahora

$\boxed{\hookleftarrow}$

y se borran todas las expresiones.

Funciones y Constantes
La forma de escribir (en el programa DERIVE) las operaciones básicas de Matemáticas, es la siguiente:

OPERACIÓN	MATEMÁTICAS	DERIVE
Notación Decimal	$3'567$	3,567
Suma	$37 + 45$	$37 + 45$
Resta	$56 - 75$	$56 - 75$
Producto	24×56	$24 * 56$
Cociente	$\frac{21}{38}$	$21/38$
Potencia	24^3	24ˆ3
Raices	$\sqrt[7]{2{,}35}$	2,35ˆ(1/7)

Por ejemplo, para introducir la expresión

$$8'53 \times 34 + \frac{45}{7 + 3'24} - 10 + \sqrt[13]{5'43^6}$$

tecleamos
Author
8,53 $*$ 34 + 45/(7 + 3,24) − 10 + 5,43ˆ(6/13)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)

$$\boxed{1: \ 8'53 \times 34 + \frac{45}{7 + 3'24} - 10 + \sqrt[13]{5'43^6}}$$

Veamos ahora como podemos introducir los números π y e. Para ello, tecleamos:
Author
Alt+p (simultáneamente, o pi) [**Alt+e** o #e]
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{2: \ \pi \quad [e]}$

Para obtener un valor aproximado de cada una de estas constantes, con la precisión que hayamos determinado, tecleamos
appro**X**
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{3: \ 3{,}14159 \quad [2{,}71828]}$

El programa DERIVE tiene introducidas funciones matemáticas de uso habitual. La forma de escribirlas es la siguiente:

FUNCIONES	DERIVE
SENO	$\sin(x)$
COSENO	$\cos(x)$
TANGENTE	$\tan(x)$
ARCOSENO	$\mathrm{asin}(x)$
ARCOCOSENO	$\mathrm{acos}(x)$
ARCOTANGENTE	$\mathrm{atan}(x)$
LOGARITMO NEPERIANO	$\ln(x)$
EXPONENCIAL	$\exp(X)$

Estas funciones podemos evaluarlas directamente en el punto que queramos. Por ejemplo, si queremos calcular el valor de la función seno en el punto π, basta realizar lo siguiente:
Author
sin(pi)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{4:\ \sin[\pi]}$
Simplify (o appro**X**)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{5:\ 0}$

En el caso anterior, al ser $\sin(\pi)$ un número exacto, da lo mismo teclear **S**implify o appro**X**. Pero, por ejemplo, si queremos calcular $\sin(0'192)$, con **S**implify obtendríamos $\sin(0'192)$. En cambio, con appro**X** el programa nos daría como resultado aproximado $0'1908$.

Con el programa DERIVE, podemos realizar manipulaciones algebraicas en el sentido que permite simplificar funciones. Veamos un ejemplo. Vamos a simplificar la función

$$\mathrm{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 + \ln\Big(\exp(2x)\Big)$$

Para ello, tecleamos
Author
sin^2(x) + cos^2(x) + ln(exp$(2x)$)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{6:\ \sin(x)^2 + \cos(x)^2 + \ln(\hat{e}^{2x})}$
Simplify
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)

$\boxed{7:\ 2x+1}$

Vamos a suponer que queremos **evaluar** una función (la de la expresión 7 por ejemplo) en varios puntos, 2 y 3. Una forma rápida de hacerlo es la siguiente: tecleamos
Author
$x := 2$
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{8:\ x := 2}$
Simplify (apareciendo SIMPLIFY expresion #8)
iluminamos la expresión #7
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{9:\ 5}$

Para evaluar en el punto 3, tecleamos
Author
$x := 3$
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{10:\ x := 3}$
Simplify (apareciendo SIMPLIFY expresion #10)
iluminamos la expresión #7
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{11:\ 5}$

Con la expresión #10 lo que hemos hecho es *asignar a la variable* x el valor 3. Si seguimos utilizando la misma letra x como una variable, el programa la utilizará como el número 3. Para evitar esto, hemos de *decir al ordenador* que ahora queremos que la variable x *tenga el valor* x. Para ello, teclearemos:
Author
$x := x$
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{12:\ x := 3}$

con lo que x volverá a ser una variable. Para continuar, vamos a borrar todas las expresiones con **R**emove.

Polinomios. Ecuaciones con una incógnita.
El programa DERIVE permite realizar algunas operaciones con polinomios. Una de ellas es la que permite desarrollar una expresión polinómica en potencias de la incógnita. Para verlo, vamos a considerar el polinomio $(x+1)x^2 - 4(x+1)$. Lo introducimos, tecleando:
Author
$(x+1)x\hat{}2 - 4(x+1)$
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{1:(x+1)x^2 - 4(x+1)}$
Expand
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{2:\ x^3 + x^2 - 4x - 4}$

También se pueden resolver ecuaciones en una incógnita. Veamos por ejemplo la ecuación $(x-2)x = k$.
Tecleamos
Author
$(x-2)x = k$
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{3:\ (x-2)x = k}$

Para resolverla, tecleamos
so**L**ve (apareciendo SOLVE variable: x)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{4:\ x = \sqrt{(k+1)} + 1}$
$\boxed{5:\ x = 1 - \sqrt{(k+1)}}$

Con el programa DERIVE podemos resolver ecuaciones polinómicas hasta de cuarto grado, dando el programa todas las raices, sean reales o complejas. Borremos todas las expresiones, para seguir.

Matrices, sistemas lineales
Vamos a ver como podemos introducir una matriz y las operaciones que podemos realizar con ella. Supongamos que queremos introducir la matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

para ello, tecleamos
Declare
Matrix (aparece DECLARE MATRIX: Rows:3 Columns:3)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparecerá)
MATRIX element:0
ENTER matrix element $(1,1)$
9
$\boxed{\hookleftarrow}$ (aparecerá)
MATRIX element:0
ENTER matrix element $(1,2)$
6
$\boxed{\hookleftarrow}\,-2\,\boxed{\hookleftarrow}\,5\,\boxed{\hookleftarrow}\,1\,\boxed{\hookleftarrow}\,0\,\boxed{\hookleftarrow}\,5\,\boxed{\hookleftarrow}\,-3\,\boxed{\hookleftarrow}\,4\,\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)

$$\boxed{1:\ \begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$$

Para calcular su **determinante** tecleamos
Author
det(**F3**) (la tecla **F3** permite copiar la expresión iluminada en la pantalla)
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)

$$\boxed{2:\ \mathrm{DET}\begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}}$$

Simplify
$\boxed{\hookleftarrow}$ (apareciendo)
$\boxed{3:\ -44}$

Para calcular la inversa de la matriz dada en la expresión 1, tecleamos lo siguiente:
Author *iluminamos la expresión* 1
F3ˆ(−1)
$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo en pantalla

$$\boxed{4:\ \begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Simplify
$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$$\boxed{5:\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{9}{22} & -\frac{1}{22} \\ \frac{5}{11} & -\frac{23}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{5}{11} & -\frac{57}{44} & \frac{21}{44} \end{bmatrix}^{-1}}$$

Vamos a realizar ahora el producto de dos matrices, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para ello, introducimos la segunda matriz, la primera ya está en la expresión 1, tecleando:
Declare
Matrix
(aparece DECLARE MATRIX: Rows:3 Columns:3, luego como la matriz que vamos a introducir es de tamaño 3×1, hemos de cambiar el número de columnas)
Tab (tabulador, para poner el cursor debajo del número de columnas)
1 para introducir el número de columnas. Ahora introducimos la matriz
$\boxed{\hookleftarrow}$1 $\boxed{\hookleftarrow}$2 $\boxed{\hookleftarrow}$2 (apareciendo)

$$\boxed{6:\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Author iluminamos la expresión 1
F3 . iluminamos la expresión 6 **F3**
$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$$\boxed{7: \begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Simplify

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$$\boxed{8: \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}}$$

Para resolver un **sistema** de ecuaciones, por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

tecleamos

Author

$[2x - 3y = 1,\, 4x - 2y = 6]$

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{9\colon\ [2x - 3y = 1,\, 4x - 2y = 6]}$

so**L**ve

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{10:\ [x = 2,\, y = 1]}$

Cálculo. Derivación, Integración.

Con el programa DERIVE podemos realizar ciertas operaciones algebraicas del cálculo. Comencemos con la derivación. Supongamos que queremos calcular la derivada, de un cierto orden, de la función

$$\ln(x) + cos(x) + 2x.$$

Comenzamos introduciendo la función

Author

ln(x)+cos(x)+2x

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{\text{1: LN(x)+COS(x)+2x}}$

Calculus

Differentiate

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS DIFFERENTIATE variable:x)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS DIFFERENTIATE: order 1)

si vamos a calcular, por ejemplo, la derivada de orden cuatro, teclearíamos 4. En este ejemplo, calculamos la derivada primera, luego no tecleamos nada.

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$$\boxed{1:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{LN(x)+COS(x)+2x})}$$

Simplify

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{2:\ \text{-SIN(x)+}\frac{1}{x}\text{+2}}$

También podemos calcular integrales (definidas e indefinidas). Por ejemplo, para calcular

$$\int (1+x)\mathrm{d}x$$

tecleamos

Author

(1+x)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{1:\ \text{1+x}}$

Calculus

Integrate

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS INTEGRATE variable:x)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS INTEGRATE: lower limit upper limit)

los límites de integración, que en este caso no se consideran

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{2:\ \int\ \text{(1+x)dx}}$

Simplify

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{3:\ \frac{x^2}{2}+x}$

Para calcular una integral definida, por ejemplo

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

tecleamos

Author

cos(xˆ2)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{1:\ \text{COS(xˆ2)}}$

Calculus

Integrate

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS INTEGRATE variable:x)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo (CALCULUS INTEGRATE: lower limit upper limit)

los límites de integración, que en este caso son 0 y 1. Ahora, para introducirlos, tecleamos

0

Tab 1

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{2:\ \int_0^1 \ \mathrm{COS(x\hat{\ }2)dx}}$

Finalmente, para calcular la integral de la expresión 2, podemos teclear **S**implify o appro**X**. Si la integral se pudiera calcular por métodos algebraicos, lo que no es nuestro caso, daría igual una cosa u otra, pero en nuestro caso hemos de teclear

appro**X**

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{3:\ 0.904526}$

Declaración de funciones

El programa DERIVE permite *declarar* funciones, de manera que una expresión muy larga se pueda resumir, siendo más legible. Veamos este proceso y su utilidad en el siguiente ejemplo. Vamos a comprobar que la función

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

cumple la igualdad

$$x^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Para ello, tecleamos

Author

f(x,y):=xy/(x+y)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{1:\ \mathrm{F(x,y)} = \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x+y}}}$

Author

f(x,y)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{2:\ \mathrm{F(x,y)}}$

Ahora, con **C**alculus y **D**ifferentiate vamos introduciendo las expresiones

$\boxed{3:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{F(x,y)}}$

$\boxed{4:\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{F(x,y)}}$

$\boxed{5:\ [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}]^2\ \mathrm{F(x,y)}}$

$\boxed{6:\ [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}]^2\ \mathrm{F(x,y)}}$

Ahora (no olvidemos la función de la tecla **F3**), tecleamos

Author
x^(2) (expresión 5)+2xy(expresión 4)+y^(2)(expresión 6)

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$$\boxed{7:\ x^2[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}]^2\ \mathrm{F(x,y)} + 2xy\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{F(x,y)}\ +\ y^2[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}]^2\ \mathrm{F(x,y)}}$$

Simplify

$\boxed{\hookleftarrow}$ apareciendo

$\boxed{8:\ 0}$

Ecuaciones diferenciales
Con el programa DERIVE podemos resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales. Veamos, con ejemplos, el proceso de resolución.
1) Variables separadas: Resolver el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^x}\dfrac{1}{x} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Notemos que la ecuación diferencial anterior es de variables separadas, puesto que se puede poner en la forma

$$x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}t.$$

Luego, la solución es

$$\int_1^x x\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}t.$$

Vamos a introducir la última expresión en el ordenador: para ello, vamos introduciendo, respectivamente, las expresiones:

$$1:\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{t}}}{\mathbf{1}-\mathrm{e}^{\mathbf{t}}} \qquad 2:\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \qquad 3:\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad 4:\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{t}}}{\mathbf{1}-\mathrm{e}^{\mathbf{t}}}\,\mathrm{d}\mathbf{t} \qquad 5:\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{t}}}{\mathbf{1}-\mathrm{e}^{\mathbf{t}}}\,\mathrm{d}\mathbf{t}$$

Con **S**implify, obtenemos

$$6:\ln(\mathbf{x}) = \mathbf{ln}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{t}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\Big)$$

Finalmente, aplicando la función exponencial, resulta

$$7:\mathbf{x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{t}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

2) Lineal: Resolver el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tan(t)\,x + \dfrac{1}{\cos(t)} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Como le ecuación diferencial anterior es lineal, su solución viene dada por la expresión:

$$x(t) = e^{\int_0^t \tan(s)\,\mathrm{d}s} \left(\int_0^t \frac{1}{\cos(s)}\, e^{-\int_0^s \tan(u)\,\mathrm{d}u}\, \mathrm{d}s \right).$$

Para introducir dicha expresión, vamos introduciendo, respectivamente, las expresiones:

$$1: \tan(\mathbf{s}) \qquad 2: -\tan(\mathbf{u}) \qquad 3: \frac{\mathbf{1}}{\cos(\mathbf{s})} \qquad 4: \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \tan(\mathbf{s})\,\mathrm{d}(\mathbf{s}) \qquad 5: e^{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \tan(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s}}$$

$$6: \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} -\tan(\mathbf{u})\,\mathrm{d}(\mathbf{u}) \qquad 7: e^{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} -\tan(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}} \qquad 8: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\mathbf{s})} e^{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} -\tan(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}}$$

$$9: \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \frac{\mathbf{1}}{\cos(\mathbf{s})}\, e^{-\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} \tan(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}}\, \mathrm{d}\mathbf{s} \qquad 10: e^{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \tan(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s}} \left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \frac{\mathbf{1}}{\cos(\mathbf{s})}\, e^{-\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} \tan(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}}\, \mathrm{d}\mathbf{s} \right)$$

Con **S**implify, obtenemos

$$11: \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{cos}(\mathbf{t})}$$