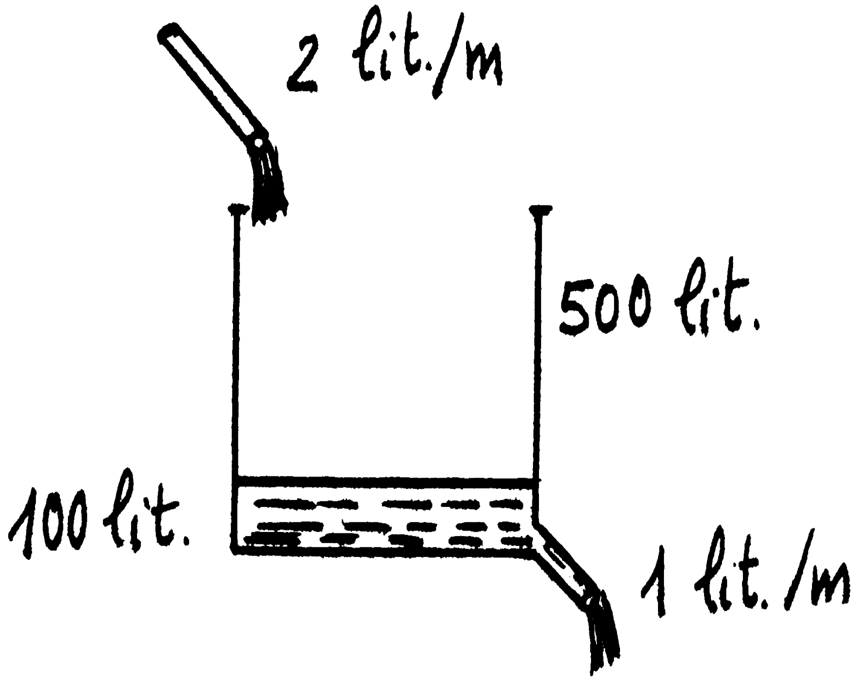
Problemas de Tanques Agitados

Problema 5.

Un depósito de 500 litros de capacidad contiene inicialmente 100 litros de agua pura. A partir del instante $t = 0$, agua que contiene un 50% de líquido contaminante penetra en el depósito a la velocidad de 2 l/m (m=minuto), y la mezcla bien agitada, sale del tanque a la velocidad de 1 l/m. Encontrar la concentración (en tanto por ciento) de líquido contaminante que hay en el tanque en el momento que se desborda.



Solución.- Llamemos C al líquido contaminante. Por la abreviatura "lit. de C" indicaremos *litros de C*. El agua contaminada que penetra en el tanque trae 1/2 l. de C por cada litro. Por lo tanto en un minuto penetran

$$2\ \frac{\text{lit.}}{\text{m}} \times \frac{1}{2}\ \frac{\text{lit. de } C}{\text{lit.}} = 1\ \frac{\text{lit. de } C}{\text{m}}$$

Sea $x(t)$ la cantidad de *litros* de líquido C que hay en el tanque a los t minutos de empezar el bombeo:

$$x(0) = 0.$$

Si llamamos $v(t)$ al volumen en litros de agua contaminada que hay en el depósito a los t minutos de comenzar el bombeo, se tiene que

$$v(t) = 100 + (2-1)\,t = 100 + t$$

En el instante t, la cantidad de líquido C que sale del tanque por minuto, es

$$\frac{x(t)}{100+t}\ \frac{\text{lit. de } C}{\text{lit.}} \times 1\ \frac{\text{lit.}}{\text{m}} = \frac{x(t)}{100+t}\ \frac{\text{lit. de } C}{\text{m}}.$$

Utilizando el principio fundamental:

$$\boxed{\text{velocidad de } x(t)} = \boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de } C \\ \text{que entra por minuto}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de } C \\ \text{que sale por minuto}\end{array}}$$

resulta el modelo matemático:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{x(t)}{100+t} \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

que es un **problema de condiciones iniciales**. La correspondiente ecuación diferencial es lineal no homogénea de primer orden:

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{100+t} + 1.$$

Es de la forma

$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t).$$

Luego

$$a(t) = \frac{-1}{100+t}, \qquad b(t) = 1.$$

Aquí $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Sustituyendo estos datos en la fórmula que da la solución

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau}\, b(s)\,ds + x_0 \right]$$

queda:

$$x(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{100+s} \right) \int_0^t \exp\left(\int_0^s \frac{d\tau}{100+\tau} \right) ds$$

Como

$$\int \frac{ds}{100+s} = \ln(100+s) \Longrightarrow \int_0^t \frac{ds}{100+s} = \ln(100+s)\Big|_0^t$$

$$= \ln(100+t) - \ln(100) = \ln\left(\frac{100+t}{100} \right) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{100}{100+t} \int_0^t \frac{100+s}{100}\,ds = \frac{100}{100+t} \left[\int_0^t ds + \frac{1}{100} \int_0^t s\,ds \right] \\ &= \frac{100}{100+t} \left[t + \frac{1}{100}\, \frac{s^2}{2}\Big|_0^t \right] = \frac{100}{100+t} \left[t + \frac{1}{100}\, \frac{t^2}{2} \right] \\ &= \frac{100}{100+t} \left[\frac{100\,t + \frac{t^2}{2}}{100} \right] = \frac{t\left[100 + \frac{t}{2}\right]}{100+t} \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{100\,t + \frac{t^2}{2}}{100+t}$$

El tanque tarda en llenarse 400 m. $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(400) &= \frac{100 \times 400 + \frac{400^2}{2}}{100+400} = \frac{40.000 + \frac{16.000}{2}}{500} \\ &= \frac{40.000 + 80.000}{500} = \frac{120.000}{500} = \frac{1.200}{5} = 240 \text{ lit. de } C \end{aligned}$$

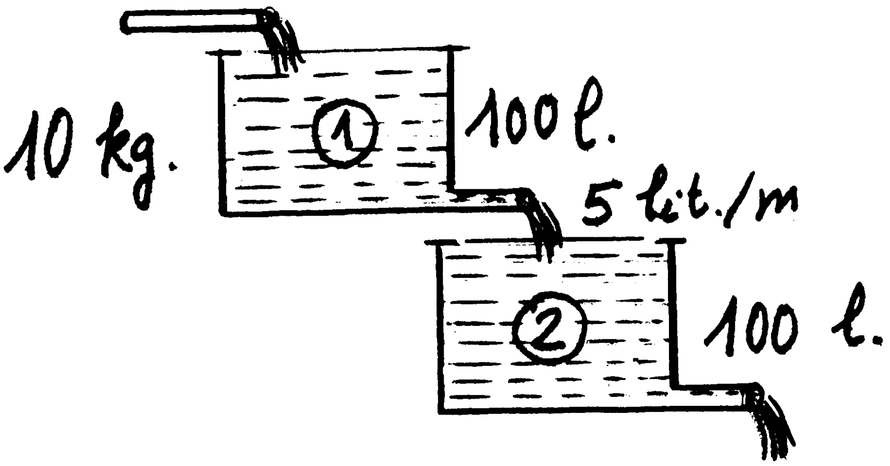
Proporción o concentración de líquido C en el minuto 400:

$$\frac{x(400)}{500} = \frac{240}{500} = \frac{48}{100}$$

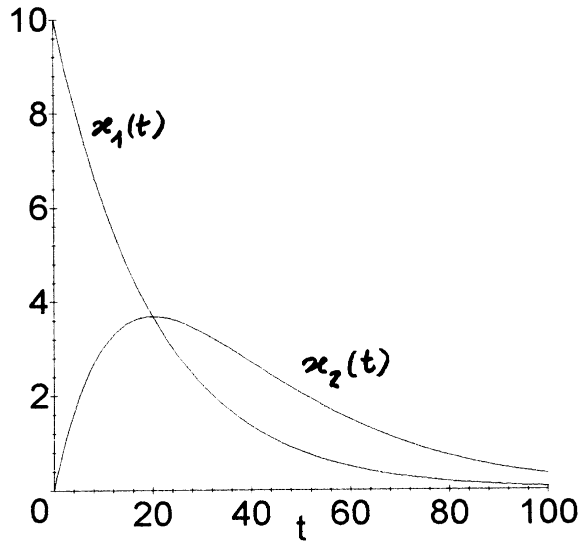
Respuesta: $\boxed{48\%}$

Problema 6.

En un depósito que contiene 10 kg. de sal en 100 l. de solución se vierten 5 litros de agua por minuto. La mezcla (homogénea) que se forma se derrama a la misma velocidad en otro depósito de igual capacidad (100 l.) lleno inicialmente de agua pura, saliendo igualmente el exceso de líquido de éste por un orificio inferior.
¿Cuándo alcanzará la cantidad de sal su máximo en el segundo depósito?. Determinar esta cantidad de sal.



Solución.- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los kilogramos de sal presentes en el depósito 1 y en el 2 a los t minutos de comenzar, respectivamente. Las posibles gráficas de estas funciones son



Primero hallaremos la función $x_1(t)$. Después utilizaremos esta función para determinar la concentración en la solución que entra en el depósito de abajo.

La ecuación diferencial del $1^{\underline{\text{er}}}$ depósito es

$$x_1'(t) = -\frac{x_1(t)}{20}$$

pues

$$5\ \frac{\text{lit.}}{\text{m}} \times \frac{x_1(t)\ \text{kg}}{100\ \text{lit.}} = \frac{x_1(t)}{20}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

La condición inicial es $x_1(0) = 10$

La solución de

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\dfrac{1}{20}\, x_1(t) \\ x_1(0) = 10; \end{cases}$$

es

$$\boxed{x_1(t) = 10\ \exp\left(-\tfrac{t}{20}\right)}$$

La ecuación diferencial del 2º depósito es

$$x_2'(t) = \frac{x_1(t)}{100} \cdot 5 \; - \; \frac{x_2(t)}{100} \cdot 5;$$

es decir

$$x_2'(t) = \frac{1}{2} \exp(-\frac{t}{20}) \; - \; \frac{x_2(t)}{20}$$

o bien

$$x_2'(t) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{20}\right) \; - \; \frac{x_2(t)}{20}.$$

La condición inicial para el 2º depósito es $x_2(0) = 0$.

La solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_2'(t) = -\frac{1}{20}\, x_2(t) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{20}\right) \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

es

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\, t \exp\left(-\frac{t}{20}\right)$$

Derivamos esta función para hallar sus posibles puntos de máximo y mínimo

$$x_2'(t) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{20}\right) - \frac{t}{40} \exp\left(-\frac{t}{20}\right)$$

Así,

$$x_2'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{40} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{t}{40} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{t = 20\,\text{m.}}$$

Hallando $x_2''(t)$ comprobamos que

$$x_2''(20) = -\frac{1}{40\, e} < 0;$$

por lo tanto $x_2(t)$ alcanza un máximo en $t = 20$. Como es el único máximo relativo, es el máximo absoluto. Además,

$$\max_{0 \leq t < \infty} x_2(t) = x_2(20) = \frac{10}{e} \simeq \boxed{3{,}68 \text{ kg}}$$