Urtarrilaren 27ko azterketaren laburpena

Zenbakizko Kalkulua

1.- Bi kasuetan erroreak kalkulatzen baditugu,

$$E_1 = \frac{1}{6} - 0.1663 = 0.00036 = \frac{11}{30000} \text{ eta } E_2 = 0.167 - \frac{1}{6} = 0.0003 = \frac{1}{3000} = \frac{10}{30000}$$

Bi hurbilketek 3 zifra dezimal zehatz badituzte ere, argi dago, $E_2 < E_1$ dela, beraz, errorerik txikiena egiteko, 0.167 hurbilketa aukeratu beharra dago.

2.-(a) Printzipioz, bigarren mailako polinonio interpolatzailea kalkulatu nahi izanez gero, hiru puntu aukeratu beharra dago eta aukeraketarik normalena eta errezena, $x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4$ (tarteko erdipuntua) eta $x_3 = \pi/3$ (beraz $h = \pi/12$) hartzea izango da, jakinda,

$f(x_1) = f(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2, f(x_2) = f(\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0$ eta $f(x_3) = f(\pi/3) = \cos(2\pi/3) = -1/2$ direla.

$(\pi/6, 1/2), (\pi/4, 0)$ eta $(\pi/3, -1/2)$ puntuak harturik eta Lagrangeren metodoa erabiliz, polinomio interpolatzailea:

$$L_1(x) = \frac{72}{\pi^2}x^2 - \frac{42}{\pi}x + 6\,,\ L_2(x) = -\frac{144}{\pi^2}x^2 + \frac{72}{\pi}x - 8$$

$$L_3(x) = \frac{72}{\pi^2}x^2 - \frac{30}{\pi}x + 3 \quad \text{eta} \quad p(x) = -\frac{6}{\pi}x + 3/2$$

2.-(b) $z \in [\pi/6, \pi/3]$ eta $h = \pi/12$ izanda,

$$|E_z| = \frac{|\prod_{i=0}^{2}(t-i)|h^3}{3!}\,|f'''(c)|\,,\ \text{non } c \in (\pi/6, \pi/3) \text{ den.}$$

$$g(t) = \prod_{i=0}^{2}(t-i) = t^3 - 3t^2 + 2t;\ |g(t)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9};\ 0 \leq t \leq 2 \text{ (klasean egindakoa)}$$

$$f'''(x) = 8\sin(2x);\ |f'''(x)| \leq f'''(\pi/4) = 8\sin(\pi/2) = 8;\ \pi/6 < x < \pi/3$$

$$\text{Beraz,}\quad |E_z| \le frac2\sqrt{3}/9\,(\pi/12)^3\,83! = \frac{\sqrt{3}\pi^3}{5832} \simeq 0.009208$$

$$\text{Bestalde,}\quad |E_{5\pi/24}| = |f(5\pi/24) - p(5\pi/24| \simeq 0.2588 - 0.25 \simeq 0.0088$$

aurrekoa baino txikiagoa, jakina

2.-(c)

$$|E_z| \le \frac{2\sqrt{3}/9\,h^3\,8}{3!} < 5.10^{-3} \Longleftrightarrow h < 0.2135\cdots \text{ edo } h = \pi/n \text{ eginez} \Longleftrightarrow n > 14.\cdots$$

3.- Kupelan dagoen alkohol kantitatearen bilakaera aztertzerakoan lortzen dugun ekuazio diferentziala, hauxe da;

$$x\prime(t) = 3\frac{5}{100} - \frac{1}{100+2t}x(t)$$

Beraz, $a(t) = -\frac{1}{100+2t}$, $b(t) = \frac{3}{20}$, $t_0 = 0$ har dezakegu eta hasierako alkoholaren proportzioa %20 denez, $x(t_0) = x(0) = 20$ dugu.

Hau guztia kontutan hartuz, ekuazio diferentzialaren soluzioa, ondokoa:

$$x(t) = [\int_0^t \frac{3}{20} e^{-\int_0^s -\frac{1}{100+2r}\,dr}\,ds + 20]\,e^{\int_0^t \frac{-1}{100+2s}\,ds} \quad \text{non}$$

$$\int_0^s \frac{1}{100+2r}\,dr = \frac{1}{2}(\ln(100+2s) - \ln 100) = \ln(1+\frac{s}{50})^{1/2} \quad \text{eta}$$

$$\int_0^t \frac{-1}{100+2s}\,ds = \frac{1}{2}(\ln(100+2t) - \ln 100) = \ln(1+\frac{t}{50})^{-1/2}$$

$e^{\ln a} = a$, $\forall a$, denez, soluzioa horrela geratuko da;

$$x(t) = [\int_0^t \frac{3}{20}(1+\frac{s}{50})^{1/2}\,ds + 20]\,(1+\frac{t}{30})^{-1/2}$$

Bukatzeko, egin dezagun azken integrala;

$$\int_0^t (1+\frac{s}{50})^{1/2}\, ds = \frac{50}{3/2}\,[(1+\frac{t}{30})^{3/2}-1] = \frac{100}{3}\,[(1+\frac{t}{50})^{3/2}-1] \quad \text{eta orduan,}$$

$$x(t) = [\frac{3\times 100}{20\times 3}((1+\frac{t}{50})^{2/3}-1)+20][(1+\frac{t}{50})^{-1/2}] = 5[(1+\frac{t}{500})+3(1+\frac{t}{50})^{-1/2}]$$

$$= 5(1+\frac{t}{50})[1+3(1+\frac{t}{30})^{-1/2}]$$

Halaber, $t=25$ eta $t=30$ denean, kupelaren alkoholaren proportzioak,

$$k(25) = \frac{x(25)}{150} \simeq 0.1316\cdots \quad \text{eta} \quad k(30) = \frac{x(30)}{160} \simeq 0.12411\cdots$$

4.- Ohartu,

$$\int_0^t ts\, ds = t\int_0^t s\, ds = t\,\frac{t^2}{2} = \frac{t^3}{2} \quad \text{eta} \quad \int_0^t t\, ds = t\int_0^t ds = t^2$$

Orduan, bi ekuazioak t-rekiko deribatuz, ondoko ekuazio diferentzial linealezko sistema lortzen da;

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rl} x'(t) = & -x(t)+2y(t)+\frac{3t^2}{2} \\ y'(t) = & -x(t)+2y(t)+2t \end{array}\right. \\ x(0)=2,\, y(0)=1 \end{array}\right.$$

Balio propioak: $\lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 = 1$

Bektore propioak: $c^1 = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ eta $c^2 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$

Orduan, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ aukeratuz, eta $z(t) = P^{-1}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ eginez, sistema berria:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z'(t) & = & D\, z(t)+h(t) \\ z(0) & = & P^{-1}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \end{array}\right. \qquad \text{non,}$$

$$D=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix},\ z(0)=P^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ \text{eta}$$

$$h(t)=P^{-1}\,b(t)=P^{-1}\begin{bmatrix}3t^2/2\\2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3t^2/2-2t\\-3t^2/2+4t\end{bmatrix}\quad \text{Beraz,}$$

$$z(t)=e^{Dt}\,[\int_0^t e^{-Ds}\,h(s)\,ds+z(0)]=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^t\end{bmatrix}(\int_0^t\begin{bmatrix}1&0\\0&e^{-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3s^2/2-2s\\-3s^2/2+4s\end{bmatrix}ds+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^t\end{bmatrix}(\int_0^t\begin{bmatrix}3s^2/2-2s\\e^{-s}(-3s^2/2+4s)\end{bmatrix}ds+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^t\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}t^3/2-t^2\\e^{-t}/2(3t^2-2t-2)+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}t^3/2-t^2+1\\1/2(3t^2-2t-2)+e^t\end{bmatrix}$$

Eta hasierako sistemaren soluzioa,

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=P\,z(t)=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^3/2-t^2+1\\1/2(3t^2-2t-2)+e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t+t^3-t^2/2-t+1\\e^t+t^3/2+t^2/2-t\end{bmatrix}$$

Estatistika

1.- $\mathcal{A}\equiv$ *kolore bereko bolak* eta $\mathcal{B}=\bar{\mathcal{A}}\equiv$ *kolore desberdineko bolak* izanda, ontzira x bola beltz sartuz gero:

$$p(\mathcal{A})=p(\mathcal{B})\Longleftrightarrow p(\mathcal{A})=1/2\Longleftrightarrow \frac{\mathcal{C}_3^2+\mathcal{C}_x^2}{\mathcal{C}_{x+3}^2}=1/2\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2-7x+6=0\Longleftrightarrow x=1\quad \text{edo}\quad x=6$$

Edo horrela, $p(\mathcal{A})=p(\mathcal{B})\Longleftrightarrow p(\mathcal{B})=1/2\Longleftrightarrow \frac{3x}{\mathcal{C}_{x+3}^2}=1/2\Longleftrightarrow x=1\quad \text{edo}\quad x=6$

2.- $\mathcal{A}_1 \equiv$ *lana edukitzea*, $\mathcal{A}_2 \equiv$ *langabezian egotea* eta $\mathcal{G} \equiv$ *gizonezkoa izatea* badira,

$$p(\mathcal{A}_2|_{\mathcal{G}}) = \frac{p(\mathcal{A}_2)p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_2})}{p(\mathcal{G})} = \frac{p(\mathcal{A}_2)p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_1})}{p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_1}) + p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_2})} =$$

$$= \frac{0.15 \times 0.4}{0.85 \times 0.55 + 0.15 \times 0.4} = \frac{24}{211} \simeq 0.1137$$

3.-(a) Esperimentua $\equiv$ *txanpon baten jaurtiketa*; 400 jaurtiketa egin ondoren $\mathcal{X}$ aldagia $\equiv$ *aurpegi kopurua neurtzen duena.*

Orduan, $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{B}in(400, 1/2) \simeq \mathcal{N}(200, 10)$ eta,

$$p(\mathcal{A}) = p(\mathcal{X} > 220) = p(\mathcal{X} \geq 220.5) = p(\mathcal{Z} \geq 2.05) \simeq 0.0202$$

non $\mathcal{Z}$, $\mathcal{X}$ aldagaiaren aldagia tipifikatua den; $\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X}-200}{10}$

3.-(b) Esperimentua $\equiv$ *dado baten jaurtiketa*; 900 jaurtiketa egin ondoren $\mathcal{Y}$ aldagia $\equiv$ *6koen kopurua neurtzen duena.*

Orduan, $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{B}in(900, 1/6) \simeq \mathcal{N}(150, 5\sqrt{5})$ eta,

$$p(\mathcal{B}) = p(\mathcal{Y} < 130) = p(\mathcal{Y} \leq 129.5) = p(\mathcal{Z} \leq -1.8335) = p(\mathcal{Z} \geq 1.8335) \simeq 0.0336$$

non $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Y}$ aldagaiaren aldagia tipifikatua den; $\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{Y}-150}{5\sqrt{5}}$