MATEMATIKA APLIKATUA

2005eko irailaren 13a

Zenbakizko Kalkulua

1.- Suposa dezagun $f(x) = \cos(\dfrac{\pi x}{6})$ funtzioa, $[0,2]$ tartean eta 2.mailako polinomio baten bidez interpolatu nahi dugula. (*2 puntu*)

a) Kalkula ezazu, $f(x)$ funtzioaren polinomio interpolatzailea.

b) Estima ezazu, prozedura horretan ager daitekeen errorea, hau da, aipaturiko tartean, zer nolako hurbilketak lortzen diren baita, $x = 1{,}5$ puntuan agerturiko errore zehatza ere. Azken emaitza hau, bat al dator aurrekoarekin?

2.- Sei azpitarte harturik eta Simpson-en erregela aplikatuz, kakula ezazu

$$\int_2^8 \ln x \, dx$$

integralaren balio hurbildua eta, errorea estimatuz, esan ezazu zer nolako hurbilketa den. Egiazta ezazu azken hau, errore zehatza kalkulatu ondoren.
(*2 puntu*)

3.- Demagun 120 litroko edukiera duen ontzi batean, 40 litro ur gazi dagoela, gatz kontzentrazioa 25 gr/l-koa delarik. Bat-batean, hodi batetik, 20 gr/l-ko gatz-kontzentrazioa duen 5 litro ur gazi sartzen hasten da minutuko, aldi berean, ontziaren behealdeko isurbide batetik, minutuko 3 litro nahastura ateratzen direlarik.
Ontzia betetzen denean, ontzira sartutako eta ontzitik ateratako gatz kantitateak kalkulatu nahi dira. (*2 puntu*)

4.- Ondoko sistematik abiaturik, kalkula itzazu $x_1(t), x_2(t)$ eta $x_3(t)$ funtzio errealak; (*2 puntu*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) & = & -x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) & = & 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{array} \right. \\ \\ x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = -3 \end{array} \right.$$

Estatistika:

Ondorengo bi ariketetatik, bakar bat aukeratu beharra dago

5.- Mago batek hiru txanpon prestatu ditu, A, B eta C, aurpegia lortzeko probabilitateak, hurrenez-hurren, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ eta $\frac{1}{8}$ izan daitezen. Magoak, zoriz aukeraturiko txanpon bat lau bider jaurti eta aurpegi bakarra lortzen baditu, zein izango da B txanpona aukeratu izana gertatzeko probabilitatea? (*2 puntu*)

6.- *Primitiva* izeneko loterian konbinazio irabazlea osatzeko, ontzi batetik, zoriz, 1etik 49ra zenbaturiko sei bola ateratzen dira. Apustu bakoitzean, sei zenbaki aukeratzen dira (jakina, 1 eta 49 bitartekoak), helburua, konbinazio irabazlearen ahalik eta zenbaki gehien asmatzea delarik.

Zozketa baterako apustu bat eginez gero, konproba ezazu konbinazio irabazlearen, gutxienez, zenbaki bat asmatzeko probabilitatea $\frac{563\,383}{998\,844} \simeq 0{,}5640$ dela. 200 apustu betetzen badira, zein izango da, gutxienez 120 apustutan, asmaturiko zenbaki bat (gutxienez) izateko probabilitatea? (*2 puntu*)

Lagungarria izan daitekeena:

$$\cos 0 = 1,\ \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\ \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f(x) = \cos(kx) \Longrightarrow f'(x) = -k\,\sin(kx)$$

$$3t^2 - 6t + 2 = 3\,(t - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\,(t - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$f(x) = \frac{6}{x^4} \text{ beherakorra da } (0, \infty) \text{ tartean}$$

Interpolazioari dagokion errorearen formula:

$$\mid E \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{n-1} (t-i) \mid\ h^n}{n!} \mid f^{(n)}(c) \mid$$

Simpsonen erregelaren errorearen formula:

$$\mid E \mid = \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \mid f^{iv}(d) \mid$$

$$n \geq 30 \text{ eta } 0{,}1 < p < 0{,}9 \text{ badira, } \Longrightarrow Bin\,(n,p) \simeq N(np, \sqrt{np\,q})$$

Emaitzak:

1.- Printzipioz, bigarren mailako polinonio interpolatzailea kalkulatu nahi izanez gero, hiru puntu aukeratu beharra dago eta aukeraketarik normalena eta errezena, $x_1 = 0, x_2 = 1$ (tarteko erdipuntua) eta $x_3 = 2$ (beraz, $h = 1$) hartzea izango da. Bestalde,

$f(x_1) = f(0) = \cos(0) = 1$, $f(x_2) = f(1) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eta
$f(x_3) = f(2) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ dira.

$(0\,,\,1), (1\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2})$ eta $(2\,,\,\frac{1}{2})$ puntuak harturik eta Lagrangeren metodoa erabiliz, ondoko polinomio interpolatzailea lortzen da:

$$L_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\,x + 1\,,\; L_2(x) = -x^2 + 2x\,,\; L_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\text{eta} \quad p(x) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}\,x^2 + (\sqrt{3} - \frac{7}{4})\,x + 1$$

Newton-en metodoa erabiliz gero,

$$p_1(x) = 1\,,\; p_2(x) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)\,x + 1 \;\text{ eta}$$

$$p_3(x) = p(x) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}\,x^2 + (\sqrt{3} - \frac{7}{4})\,x + 1$$

$h = 1$ izanda, $z \in [0\,,\,2]$ puntuan ager daitekeen errorea,

$$|\, E_z \,| = \frac{|\, \prod_{i=0}^{2}(t-i) \,|\; h^3}{3!} \;|\, f'''(c) \,|\,, \;\text{non } c \in (0,2) \text{ den.}$$

$$g(t) = \prod_{i=0}^{2}(t-i) = t^3 - 3t^2 + 2t;\; |\, g(t) \,| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9};\; 0 \leq t \leq 2 \text{ (klasean egindakoa)}$$

$$f'''(x) = \frac{\pi^3}{216}\sin(\frac{\pi\,x}{6});\text{ eta } x \in (0\,,\,2) \text{ tartean, } \sin(\frac{\pi\,x}{6}) < \sin(\frac{2\,\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ denez,}$$

$$|\, f'''(x) \,| < |\, f'''(2) \,| = \frac{\pi^3}{216}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^3\,\sqrt{3}}{432}$$

$$\text{Beraz,} \quad |\, E_z \,| \leq \frac{\frac{2\,\sqrt{3}}{9}\,1^3}{3!}\,\frac{\pi^3\,\sqrt{3}}{432} = \frac{\pi^3}{3888} \simeq 0{,}00797487$$

$$\text{Bestalde,} \quad |\, E_{1,5} \,| = |\, f(1{,}5) - p(1{,}5) \,| = |\, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{6\sqrt{3}+1}{16} \,| \simeq 0{,}00491227$$

aurrekoa baino txikiagoa, jakina.

2.- 6 azpitarte edo 7 puntu hartu behar badira, hain zuzen, ondoko hauek:

$a = x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 7$, eta $b = x_6 = 8$ ($h = 1$ izanda)

Orokorrean,

$$S(f(x), a, b, n) = \frac{h}{3}\,[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(b)]$$

eta ariketa honetan,

$$\begin{aligned} S(\ln x, 2, 8, 6) &= \frac{1}{3}\,[\ln 2 + 4\,(\ln 3 + \ln 5 + \ln 7) + 2\,(\ln 4 + \ln 6) + \ln 8] \\ &= \frac{2}{3}\,\ln(1\,058\,400) \simeq 9{,}248179 \end{aligned}$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4} \ \text{ eta } \ |f^{iv}(x)| < |f^{iv}(2)| = \frac{3}{8}\,, \forall x \in (2, 8)$$

$$\text{Beraz, } \mid E \mid = \frac{(b-a)^5}{180n^4}|f^{iv}(d)| < \frac{6^5}{180 \times 6^4}\,\frac{3}{8} = \frac{1}{80} = 0{,}0125$$

Bestalde, zatikako metodoa erabilita, benetako balioa,

$$\int_2^8 \ln x\, dx = [x\,(\ln x - 1)]_2^8 = 22\,\ln 2 - 6 \simeq 9{,}249238$$

Errore zehatza,

$$\mid E \mid = \mid 9{,}249238 - 9{,}248179 \mid \simeq \ 0{,}001059$$

hau da, estimatua baino txikiagoa.

3.- Gramotan neurturik, ontzian dagoen gatz kantitatearen bilakaera aztertzerakoan lortzen dugun ekuazio diferentziala, hauxe da:

$$x'(t) = 100 - \frac{3}{40 + 2t}\,x(t)\,,$$

minutu bakoitzeko sartzen den gatza $5 \times 20 = 100$ gramo, t unean ontziaren edukina $40+2t$ litro ur gazi eta, orduan, minutu bakoitzeko ateratzen den gatza $3\,\dfrac{x(t)}{40+2t}$ gramo direlako.

Beraz, $a(t) = -\frac{3}{40+2t}$, $b(t) = 100$, $t_0 = 0$ har dezakegu eta hasieran dagoen gatz kantitatea, $x(t_0) = x(0) = 1000$ gramo dugu.

Hau guztia kontutan hartuz, ekuazio diferentzialaren soluzioa, hauxe izango da;

$$x(t) = [\int_0^t 100\,e^{-\int_0^s -\frac{3}{40+2r}\,dr}\,ds + 1000]\,e^{\int_0^t \frac{-3}{40+2s}\,ds} \quad \text{non}$$

$$\int_0^s \frac{3}{40+2r}\,dr = \frac{3}{2}(\ln(20+s)-\ln 20) = \ln(1+\frac{s}{20})^{3/2} \quad \text{eta}$$

$$\int_0^t \frac{-3}{40+2s}\,ds = \frac{-3}{2}(\ln(20+t)-\ln 20) = \ln(1+\frac{t}{20})^{-3/2}$$

$e^{\ln a} = a,\ \forall a$, denez, soluzioa horrela geratuko da;

$$x(t) = [\int_0^t 100\,(1+\frac{s}{20})^{3/2}\,ds + 1000]\,(1+\frac{t}{20})^{-3/2}$$

Bukatzeko, egin dezagun azken integrala;

$$\int_0^t (1+\frac{s}{20})^{3/2}\,ds = \frac{20}{5/2}\,[(1+\frac{t}{20})^{5/2}-1] = 8\,[(1+\frac{t}{20})^{5/2}-1] \quad \text{eta orduan,}$$

$$x(t) = [100\times 8\,[(1+\frac{t}{20})^{5/2}-1]+1000][(1+\frac{t}{20})^{-3/2}] =$$

$$= 800\,(1+\frac{t}{20}) + 200\,(1+\frac{t}{20})^{-3/2} =$$

$$= \boxed{200\,(1+\frac{t}{20})[4+(1+\frac{t}{20})^{-5/2}]}$$

Ontzia beteko da, $v(t) = 40+2t = 120 \Longleftrightarrow t = 40$ denean eta orduan,

Sartu den gatza: $100\times 40 = 4\ kg$

Atera den gatza: Zegoena + sarturikoa - 40. minutuan dagoena, hau da,

$$1+4-x(40) = 5-2{,}4385 = 2{,}5615\,kg$$

4.- Sistemaren koefizienteen matrizea,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda\,(\lambda+1)(\lambda-3) \ \text{eta}$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = -1 \ \text{edo}\ \lambda = 3$$

Hau da, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ eta $\lambda_3 = 3$ dira A matrizearen balio propioak.

Kalkula dezagun orain balio propio hauei elkarturiko bektore propioak.
$\lambda_1 = 0$ -ri elkartutakoak,

$$(0 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ c_2 + 2c_3 & = & 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = s \\ c_2 = -2s \\ c_3 = s \end{array} \right. ; \; s \in R$$

$\lambda_2 = -1$ -ri elkartutakoak,

$$(-I_3 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ 2c_3 & = & 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -r \\ c_2 = r \\ c_3 = 0 \end{array} \right. ; \; r \in R$$

eta $\lambda_3 = 3$ -ri elkartutakoak,

$$(3I_3 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2c_1 - 2c_2 - 3c_3 & = & 0 \\ 4c_2 + 2c_3 & = & 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2u \\ c_2 = -u \\ c_3 = 2u \end{array} \right. ; \; u \in R$$

Sistemaren soluzio orokorra,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - re^{-t} + 2ue^{3t} \\ -2s + re^{-t} - ue^{3t} \\ s + 2ue^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Orduan}, X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = -\frac{5}{3} \\ r = -2 \\ u = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Beraz, eskaturiko soluzioa } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6e^{-t} - 4e^{3t} - 5}{3} \\ \frac{2e^{3t} - 6e^{-t} + 10}{3} \\ -\frac{4e^{3t} + 5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ eginez, } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ da.}$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{6e^{-t}-4e^{3t}-5}{3}\\ \frac{2e^{3t}-6e^{-t}+10}{3}\\ -\frac{4e^{3t}+5}{3}\end{bmatrix}$$

5.- Txanpona zoriz aukeratzen denez, $p(A)=p(B)=p(C)=\dfrac{1}{3}$ eta eskatzen digutena - aurpegi bakarra lortu dela jakinda, B txanpona aukeratu izana gertatzeko probabilitatea -, $p(B|_a)$ ikurraz adieraz dezakegu. Izan ere,

$$p(B|_a)=\frac{p(B)\,p(a|_B)}{p(a)} \quad \text{non,}$$

$$p(a)=p(A)\,p(a|_A)+p(B)\,p(a|_B)+p(C)\,p(a|_C)$$

$$p(a|_A)=4\,(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4};\qquad p(a|_B)=4\,(\frac{1}{4})\,(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}\qquad \text{eta}$$

$$p(a|_C)=4\,(\frac{1}{8})\,(\frac{7}{8})^3=\frac{343}{1024}$$

$$\text{Beraz,}\;\; p(a)=\frac{1}{3}\,(\,\frac{1}{4}+\frac{27}{64}+\frac{343}{1024}\,)=\frac{1031}{3072}\simeq 0{,}3356$$

$$\text{eta,}\;\; p(B|_a)=\frac{\frac{1}{3}\frac{27}{64}}{\frac{1031}{3072}}=\frac{432}{1031}\simeq 0{,}4190$$

6.- Kasu posibleak: $C_{49}^{6}=13\,983\,816$ eta kontrako kasuak: $C_{43}^{6}=6\,096\,454$

$$\text{Beraz,}\;\; p\,(\begin{array}{c}\text{gutxienez}\\ \text{zenbaki bat}\end{array})=1-\frac{6\,096\,454}{13\,983\,816}=\frac{563\,383}{998\,844}\simeq 0{,}5640$$

200 apustu egiten badira eta X aldagaiak, gutxienez asmaturiko zenbaki bat

daukaten apustuak zenbatzen baditu,, X aldagaiaren banaketa $Bin\,(200;0{,}5640)$ banaketa binomiala izango da edo, hurbilketa gisa, $N(112{,}8;7{,}0129)$, banaketa normala. Orduan, azken banaketa hau erabiliz,

$$\begin{aligned} p(X\geq 120) &\simeq p(Z=\frac{X-112{,}8}{7{,}0129}>\frac{119{,}5-112{,}8}{7{,}0129}) \\ &\simeq p(Z>0{,}9554)\simeq 0{,}17\end{aligned}$$