MATEMATIKA APLIKATUA

2005eko otsailaren 1a

Zenbakizko Kalkulua

1.- Suposa dezagun $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{3})$ funtzioa, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ tartean eta 2.mailako polinomio baten bidez interpolatu nahi dugula. (*2 puntu*)

a) Kalkula ezazu, $f(x)$ funtzioaren polinomio interpolatzailea.

b) Estima ezazu, prozedura horretan ager daitekeen errorea, hau da, aipaturiko tartean, zer nolako hurbilketak lortzen diren. Gero, $x = \frac{3}{4}$ izanik eta "benetako balioa" kontuan harturik, kalkula ezazu puntu horretan egiten den errore zehatza. Azken emaitza hau, bat al dator aurrekoarekin?

2.- Zortzi azpitarte harturik eta Simpson-en erregela aplikatuz, kakula ezazu

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

integralaren balio hurbildua eta, errorea estimatuz, esan ezazu zer nolako hurbilketa den. Egiazta ezazu azken hau, errore zehatza kalkulatu ondoren. (*2 puntu*)

3.- 300 litroko ontzi bat ur gaziz beterik dago, uraren gatz-kontzentrazioa 0.25 *kg/l*-koa delarik. Bat-batean, 0.5 *kg/l*-ko gatz-kontzentrazioa daukan ura, hain zuzen, minutuko hiru litro, ontzira sartzen hasi eta, gehiegizko nahastura, ontziak daukan isurbide batetik, hutsik dagoen 90 litroko beste ontzi batean pilatzen da. Bigarren ontzia betetzen denean, zein izango da ontzi bakoitzean egongo den gatz kantitatea? (*2 puntu*)

4.- Ondoko sistematik abiaturik, kalkula itzazu $x_1(t), x_2(t)$ eta $x_3(t)$ funtzio errealak; (*2 puntu*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 4x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) & = & 3x_1(t) + 4x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) & = & 3x_1(t) + x_2(t) + 4x_3(t) \end{array} \right. \\ \\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = 3 \end{array} \right.$$

Estatistika:

Ondorengo bi ariketetatik, bakar bat aukeratu beharra dago

1.- Esperimentu batean, sei bola beltz eta bi gorri dauzkan ontzi batetik, hiru bola atera ondoren, laugarren bat ateratzen da. Zein da, esperimentu honetan, laugarren bola hori gorria izateko probabilitatea? Eta, esperimentua burutu ondoren, azken bola beltza izan bada, zein izango da bi bola gorriak aurreneko txandan atera izanaren probabilitatea? (*2 puntu*)

2.- Hiru dado jaurtitzean datzan joku batean, gutxienez 14ko batura lortzen denean irabazi egiten da. 648 aldiz jokatu ondoren, zein izango da, gutxienez 100 aldiz eta gehienez 110 aldiz irabazteko probabilitatea? (*2 puntu*)

Lagungarria izan daitekeena:

$$\sin 0 = 0,\ \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2},\ \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f(x) = \sin(kx) \Longrightarrow f'(x) = k\,\cos(kx)$$

$$3t^2 - 6t + 2 = 3\,(t - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\,(t - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$f(x) = \frac{105}{16\,x^{\frac{9}{2}}} \quad \text{beherakorra da} \quad (0,\infty) \quad \text{tartean}$$

Interpolazioari dagokion errorearen formula:

$$\mid E \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{n} (t-i) \mid \; h^n}{n!} \; \mid f^{(n)}(c) \mid$$

Simpsonen erregelaren errorearen formula:

$$\mid E \mid = \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \; \mid f^{iv}(d) \mid$$

$$n \geq 30 \;\; \text{eta} \;\; 0{,}1 < p < 0{,}9 \;\; \text{badira,} \;\; \Longrightarrow \;\; Bin\,(n,p) \simeq \; N(np, \sqrt{np\,q})$$

Emaitzak:

1.- Printzipioz, bigarren mailako polinonio interpolatzailea kalkulatu nahi izanez gero, hiru puntu aukeratu beharra dago eta aukeraketarik normalena eta errezena, $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ (tarteko erdipuntua) eta $x_3 = \frac{3}{2}$ (beraz, $h = \frac{1}{2}$) hartzea izango da. Bestalde,

$f(x_1) = f(\frac{1}{2}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $f(x_2) = f(1) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eta
$f(x_3) = f(\frac{3}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ dira.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ eta $(\frac{3}{2}, 1)$ puntuak harturik eta Lagrangeren metodoa erabiliz, ondoko polinomio interpolatzailea lortzen da:

$$L_1(x) = 2x^2 - 5x + 3\,,\; L_2(x) = -4x^2 + 8x - 3\,,\; L_3(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\text{eta} \quad p(x) = (3 - 2\sqrt{3})x^2 + (4\sqrt{3} - \frac{11}{2})x + (\frac{5 - 3\sqrt{3}}{2})$$

$h = \frac{1}{2}$ izanda, $z \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ puntuan ager daitekeen errorea,

$$\mid E_z \mid = \frac{\mid \prod_{i=0}^{2}(t-i) \mid h^3}{3!} \mid f'''(c) \mid, \text{ non } c \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \text{ den.}$$

$$g(t) = \prod_{i=0}^{2}(t-i) = t^3 - 3t^2 + 2t;\; \mid g(t) \mid \leq \frac{2\sqrt{3}}{9};\; 0 \leq t \leq 2 \text{ (klasean egindakoa)}$$

$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{27}\cos(\frac{\pi x}{3})$; eta $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ tartean, $\cos(\frac{\pi x}{3}) < \cos(\frac{\pi 1/2}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denez,

$$\mid f'''(x) \mid \leq \mid f'''(\frac{1}{2}) \mid = \frac{\pi^3}{27}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{54}$$

$$\text{Beraz,} \quad \mid E_z \mid \leq \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}(\frac{1}{2})^3}{3!}\frac{\pi^3\sqrt{3}}{54} = \frac{\pi^3}{3888} \simeq 0{,}00797487$$

$$\text{Bestalde,} \quad \mid E_{3/4} \mid = \mid f(\frac{3}{4}) - p(\frac{3}{4}) \mid = \mid \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{6\sqrt{3}+1}{16} \mid \simeq 0{,}00491227$$

aurrekoa baino txikiagoa, jakina.

2.- 8 azpitarte edo 9 puntu hartu behar badira, hain zuzen, ondoko hauek:

$a = x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{11}{8}$, $x_2 = \dfrac{7}{4}$, $x_3 = \dfrac{17}{8}$, $x_4 = \dfrac{5}{2}$, $x_5 = \dfrac{23}{8}$, $x_6 = \dfrac{13}{4}$, $x_7 = \dfrac{29}{8}$,

eta $b = x_8 = 4$ ($h = \dfrac{3}{8}$ izanda)

Orokorrean,

$$S(f(x), a, b, n) = \frac{h}{3}\,[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(b)]$$

eta ariketa honetan,

$$S(\frac{1}{\sqrt{x}}, 1, 4, 8) = \frac{1}{8}\,[f(1) + 4\,(f(\frac{11}{8}) + f(\frac{17}{8}) + f(\frac{23}{8}) + f(\frac{29}{8})) + 2\,(f(\frac{7}{4}) + f(\frac{5}{2}) + f(\frac{13}{4})) + f(4)]$$
$$\simeq 2{,}00016655$$

$$f^{iv}(x) = \frac{105}{16x^{9/2}} \text{ eta } |f^{iv}(x)| < f^{iv}(1) = \frac{105}{16}\ , \forall x \in (1, 4)$$

$$\text{Beraz, } \mid E \mid = \frac{(b-a)^5}{180n^4}|f^{iv}(d)| < \frac{3^5}{180n^4}\,\frac{105}{16} = \frac{567}{2621411} \simeq 0{,}0021$$

Bestalde, benetako balioa,

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\,[\sqrt{x}]_1^4 = 2$$

Errore zehatza,

$$\mid E \mid = \mid 2 - 2{,}0016655 \mid \simeq\ 0{,}00016655$$

hau da, estimatua baino txikiagoa.

3.- Lehenengo ontzian dagoen gatz kantitatearen bilakaera aztertzerakoan lortzen dugun ekuazio diferentziala, hauxe da;

$$x\prime(t) = 3 \times 0{,}5 - 3\,\frac{x(t)}{300} = \frac{3}{2} - \frac{1}{300}\,x(t)$$

Beraz, $a(t) = -\frac{1}{300}$, $b(t) = \frac{3}{2}$, $t_0 = 0$ har dezakegu eta hasierako gatz-kontzentrazioa 0,25-ekoa denez, $x(t_0) = x(0) = 75$ dugu.

Hau guztia kontutan hartuz, ekuazio diferentzialaren soluzioa, ondokoa:

$$x(t) = [\int_0^t \frac{3}{2}\,e^{-\int_0^s -\frac{1}{100}\,dr}\,ds + 75]\,e^{\int_0^t \frac{-1}{100}\,ds} \quad \text{non}$$

$$\int_0^s \frac{1}{100}\,dr = \frac{1}{100}\,s \quad \text{eta} \quad \int_0^t -\frac{1}{100}\,ds = -\frac{1}{100}\,t$$

Orduan,

$$x(t) = [\frac{3}{2} \int_0^t e^{\frac{1}{100}\,s}\, ds + 75]\, e^{-\frac{1}{100}\,t} \quad \text{non,}$$

$$\int_0^t e^{\frac{1}{100}\,s}\, ds = 100\,(e^{\frac{1}{100}\,t} - 1). \quad \text{Beraz,}$$

$$x(t) = [\frac{300}{2}(e^{\frac{1}{100}\,t} - 1) + 75]\, e^{-\frac{1}{100}\,t} = 150 - 75\ e^{-\frac{1}{100}\,t}$$

Bigarren ontziari dagokion gatz kantitatearen bilakaera aztertzean,

$$y\prime(t) = 3\,\frac{x(t)}{300} = \frac{1}{100}\,x(t) = \frac{150 - 75\ e^{-\frac{1}{100}\,t}}{100} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\,e^{-\frac{1}{100}\,t}$$

Orduan,

$$y(t) = [\int_0^t (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\,e^{-\frac{1}{100}\,t})\, ds + 0]\, 1 = \frac{3}{2}\,t - \frac{300}{4}\,(e^{-\frac{1}{100}\,t} - 1) = 75\,e^{-\frac{1}{100}\,t} + \frac{3}{2}\,t - 75$$

Ordu erdia pasa ondoren, ($t = 30$), 2. ontzia beteko denean, gatz kantitateak hauexek izango dira,

$$x(30) = 150 - 75\,e^{-\frac{3}{10}} \simeq 94{,}44 \quad \text{eta} \quad y(30) = 75\,e^{-\frac{3}{10}} + 45 - 75 \simeq 25{,}56$$

Oharra: $t = 30$ denean, hau da, ordu erdia pasa ondoren, sisteman egongo den gatz kantiatatea, hasieran zegoena gehi sartu dena izango da, hain zuzen, $75 + 3 \times 0{,}5 \times 30 = 120$ kg gatz. Orduan, lehen ontzian $x(30) = 94{,}44$ kg gatz badago, bigarrenean, $120 - 94{,}44 = 25{,}56$ kg egongo dira.

4.- Sistemaren koefizienteen matrizea,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \lambda\, I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\, I_3 - A) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 41\lambda - 42 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 3)(\lambda - 7) \ \text{ eta}$$

$$\det(\lambda\, I_3 - A) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2,\ \lambda = 3 \ \text{edo}\ \lambda = 7$$

Hau da, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ eta $\lambda_3 = 7$ dira A matrizearen balio propioak.

Kalkula dezagun orain balio propio hauei elkarturiko bektore propioak.
$\lambda_1 = 2$ -ri elkartutakoak,

$$(2I_3 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & = & 0 \\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -s \\ c_2 = s \\ c_3 = s \end{array} \right. \quad ; \ s \in R$$

$\lambda_2 = 3$ -ri elkartutakoak,

$$(3I_3 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = -r \quad ; \ r \in R \\ c_3 = r \end{array} \right.$$

eta $\lambda_3 = 7$ -ri elkartutakoak,

$$(7I_3 - A)C = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3c_1 - c_2 - c_3 & = & 0 \\ -3c_1 + 3c_2 - c_3 & = & 0 \\ -3c_1 - c_2 + 3c_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2u \\ c_2 = 3u \quad ; \ u \in R \\ c_3 = 3u \end{array} \right.$$

Sistemaren soluzio orokorra,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -se^{2t} + 2ue^{7t} \\ se^{2t} - re^{3t} + 3ue^{7t} \\ se^{2t} + re^{3t} + 3ue^{7t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Orduan, } X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{2}{5} \\ r = \frac{1}{2} \\ u = \frac{7}{10} \end{array} \right.$$

$$\text{Beraz, eskaturiko soluzioa } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7e^{7t} - 2e^{2t}}{5} \\ \frac{21e^{7t} - 5e^{3t} + 4e^{2t}}{10} \\ \frac{21e^{7t} + 5e^{3t} + 4e^{2t}}{10} \end{bmatrix}$$

$$\text{Bestela, } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ eginez}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7e^{7t} - 2e^{2t}}{5} \\ \frac{21e^{7t} - 5e^{3t} + 4e^{2t}}{10} \\ \frac{21e^{7t} + 5e^{3t} + 4e^{2t}}{10} \end{bmatrix}$$

4.- Aurreneko hiru bolekin gerta daitekeena kontuan hartuta, izan bitez,
$\mathcal{A}_1 \equiv$ *3rak beltzak izatea*, $\mathcal{A}_2 \equiv$ *bi beltz eta gorri bat* eta $\mathcal{A}_3 \equiv$ *bi gorri eta beltz bat*
Orduan, $\mathcal{G} \equiv$ *4. bola gorria izatea* bada,

$$p(\mathcal{G}) = p(\mathcal{A}_1)\, p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_1}) + p(\mathcal{A}_2)\, p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_2}) + p(\mathcal{A}_3)\, p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_3})$$

$$p(\mathcal{A}_1) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{5}{14};\ p(\mathcal{A}_2) = \frac{2\, C_6^2}{C_8^3} = \frac{15}{28};\ p(\mathcal{A}_3) = \frac{6}{C_8^3} = \frac{3}{28};\ \text{eta}$$

$$p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_1}) = \frac{2}{5};\ p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_2}) = \frac{1}{5};\ p(\mathcal{G}|_{\mathcal{A}_3}) = 0\ \text{direnez,}$$

$$p(\mathcal{G}) = \frac{5}{14} \times \frac{2}{5} + \frac{15}{28} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{28} \times 0 = \frac{1}{4}$$

Bestalde, $p(\textit{4. bola beltza izatea}) = p(\bar{\mathcal{G}}) = \dfrac{3}{4}$ denez,

$$p(\mathcal{A}_3|_{\bar{\mathcal{G}}}) = \frac{p(\mathcal{A}_3)\, p(\bar{\mathcal{G}}|_{\mathcal{A}_2})}{p(\bar{\mathcal{G}})} = \frac{\frac{3}{28} \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$$

5.- Hiru dado jaurtitzen direnean, gutxienez 14ko batura lortzeko, 35 aldeko kasu dago, hain zuzen ere, horrelako hirukoteak lortzen badira:

$$(2,6,6), (3,5,6), (3,6,6), (4,4,6), (4,5,5), (4,5,6), (4,6,6),$$
$$(5,5,5), (5,5,6), (5,6,6), (6,6,6)$$

Orduan, $p = p(\textit{gutxienez 14ko batura}) = \dfrac{35}{216}$

Esperimentua $n = 648$ aldiz errepikaturik, izan bedi $\mathcal{X}$ aldagaia, gutxienez 14ko batura lortu deneko aldi kopurua neurtzen duena.

Berez, $\mathcal{X}$ aldagaiaren banaketa $Bin(648; \dfrac{35}{216})$ banaketa binomiala izango da edo, hurbilketa gisa, $N(105; 9{,}3801)$ banaketa normala.

Orduan,

$$\begin{aligned} p(100 \leq \mathcal{X} \leq 110) &= p(\frac{99{,}5 - 105}{9{,}3801} \leq \mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X} - 105}{9{,}3801} \leq \frac{110{,}5 - 105}{9{,}3801}) \\ &\simeq p(-0{,}59 \leq \mathcal{Z} \leq 0{,}59) = 1 - 2\, p(\mathcal{Z} \geq 0{,}59) \simeq 0{,}4448 \end{aligned}$$